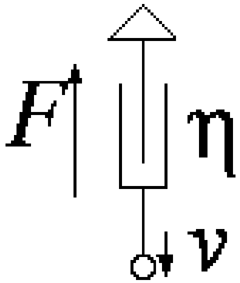
令和2年9月25日版

回路理論II

1. 過渡応答

千葉大学工学部
総合工学科電気電子工学コース
橋本研也
k.hashimoto@ieee.org
http://www.te.chiba-u.jp/lab/ken

運動に対する反作用

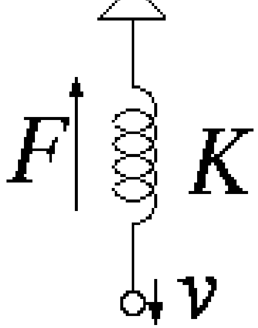


$F=\eta v$

摩擦の影響（粘性）

F: 力、v: 速度

η: 摩擦係数



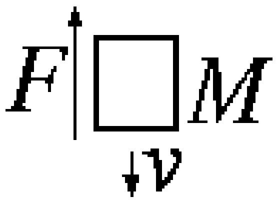
$F=Kx$

$v=dx/dt$

ばねの影響（弾性）

F: 力、x: ばねの伸び

K: ばね係数



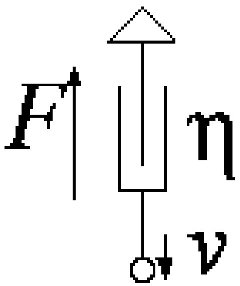
$F=Mdv/dt$

質量の影響（慣性）

F: 力、a: 加速度

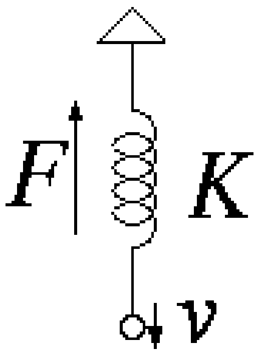
M: 質量

消費パワーと蓄積エネルギーは？



$F = \eta v$

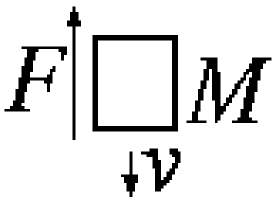
$$P_\eta = Fv = \eta v^2$$



$F = Kx$

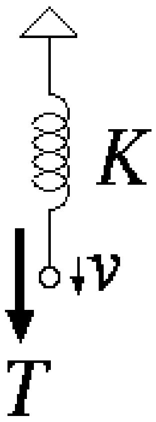
$v = dx/dt$

$$W_{\mathrm{K}} = \int F_{\mathrm{K}} v dt = \int Kx \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{2} Kx^2$$



$F = M dv/dt$

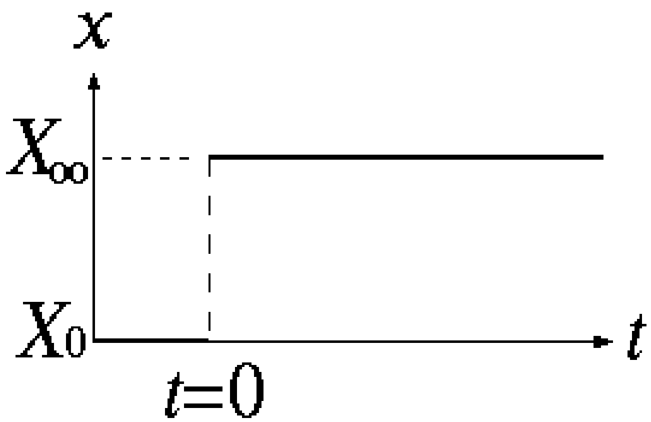
$$W_{\mathrm{M}} = \int F_{\mathrm{M}} v dt = \int Mv \frac{dv}{dt} dt = \frac{1}{2} Mv^2$$



t=0で力T印加

T=Kx

v=dx/dt



$$x = X_0 + (X_\infty - X_0)u(t)$$

X_0:　t=0^-での位置

X_∞=T/K:　t=∞での位置

X_0=0とすれば

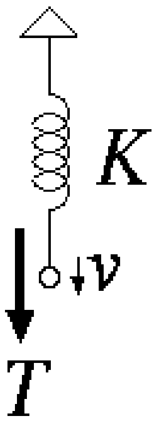
$$x = X_\infty u(t)$$

ステップ関数

（単位関数）

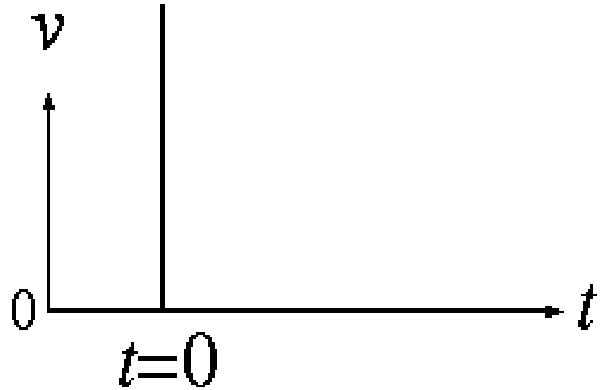
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

t=0で力T印加



$T=Kx$

$v=dx/dt$



$$x = X_0 + (X_\infty - X_0)u(t)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = (X_\infty - X_0)\delta(t)$$

X_0: t=0$^-$での位置

X_∞=T/K: t=∞での位置

X_0=0とすれば

$$v = X_\infty \delta(t)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

デルタ関数
（インパルス関数）

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

線形1階微分方程式を解く（その1）

$$\frac{dx}{dt} = g(t)$$

$\Downarrow$ 両辺を積分すると

$$\int dx = \int g(t)dt + c$$

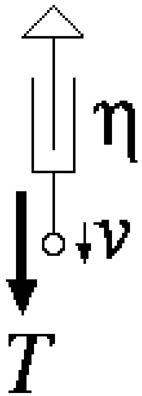
$\Downarrow$

$$x = \int g(t)dt + c$$

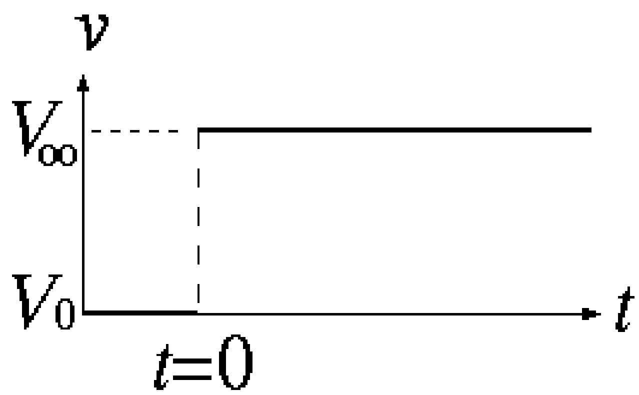
$g(t) = a$ (定数)の時

$$x = at + c$$

t=0で力T印加



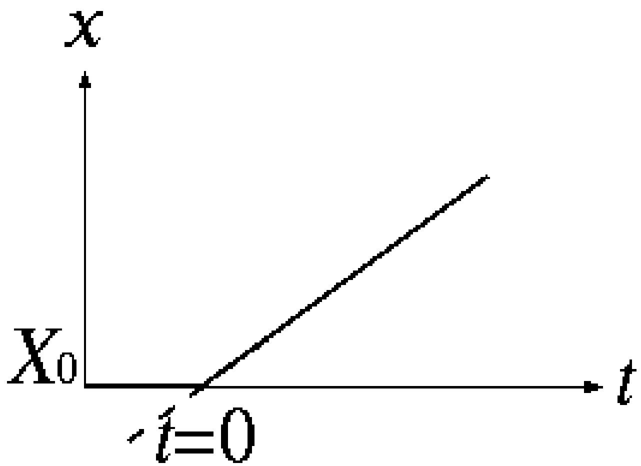
T=ηv



$$v = V_0 + (V_\infty - V_0)u(t)$$

$$x = \int v dt + X_0$$

$$= t\{V_0 + (V_\infty - V_0)u(t)\} + X_0$$

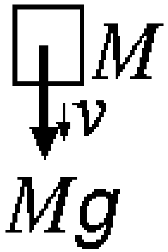


X_0: t=0でののび

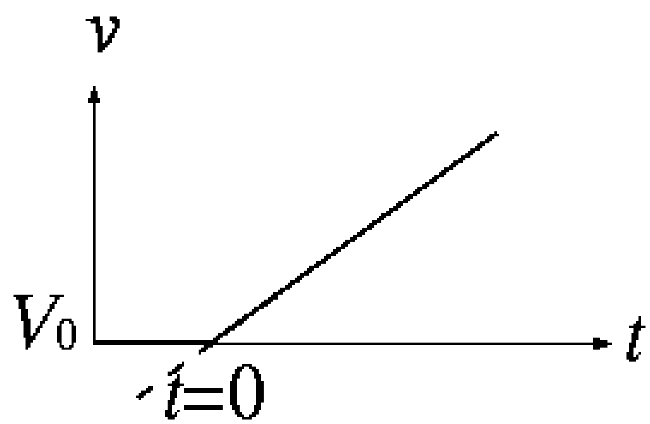
V_0: t=0での速度

V_∞=T/η: t=∞での速度

t=0で力T印加

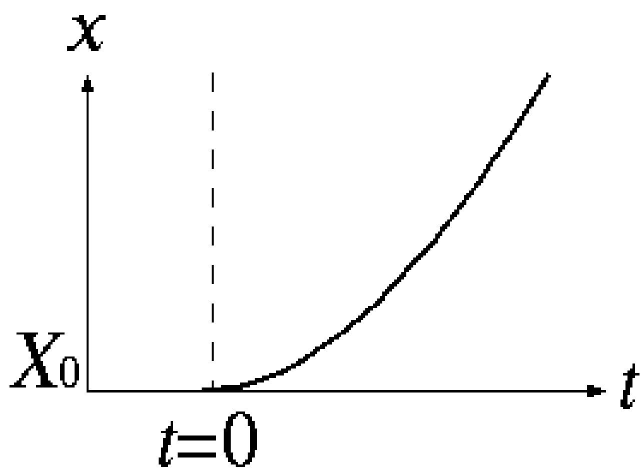


$Mg = M dv/dt$



$$v = g\int dt + V_0$$

$$= g t u(t) + V_0$$



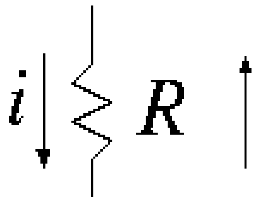
$$x = \int v dt + X_0$$

$$= \left(\frac{1}{2} g t^2 + V_0 t\right) u(t) + X_0$$

X_0:　t=0での位置

V_0:　t=0での速度

電流に対する反作用＝逆起電力

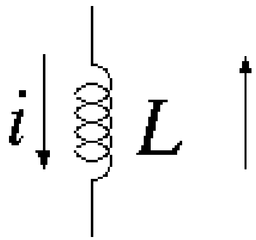


$e_R = Ri$

抵抗の影響

e_R: 電圧、i: 電流

R: 抵抗

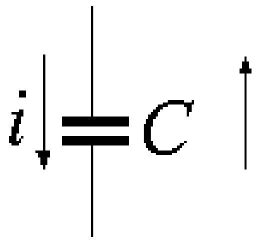


$e_L = L di/dt$

インダクタンスの影響

e_L: 電圧、i: 電流

L: インダクタンス



$e_C = q/C$

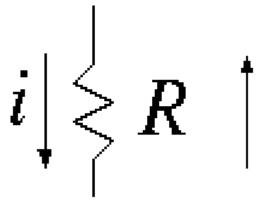
$i = dq/dt$

静電容量の影響

e_c: 電圧、i: 電流、q: 電荷

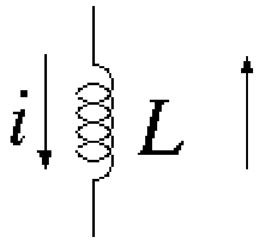
C: 静電容量

消費パワーと蓄積エネルギーは？



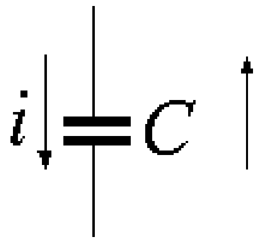
$e_R = Ri$

$$P_R = e_R i = Ri^2$$



$e_L = L di/dt$

$$W_L = \int e_L i dt = \int Li \frac{di}{dt} dt = \frac{1}{2} Li^2$$

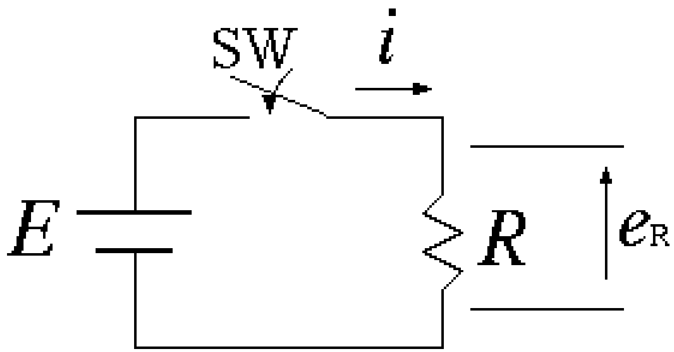


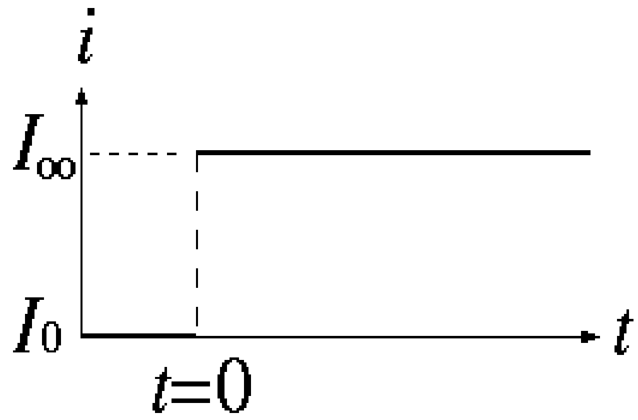
$e_C = q/C$

$i = dq/dt$

$$W_C = \int e_C i dt = \int \frac{1}{C} q \frac{dq}{dt} dt = \frac{1}{2C} q^2$$

t=0でSW on





$$i = I_0 + (I_\infty - I_0)u(t)$$

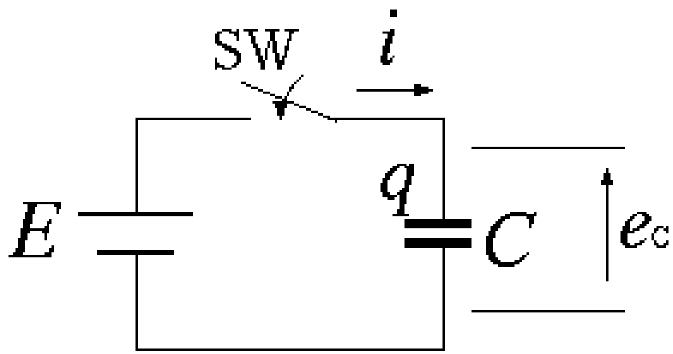
I_0: t=0^-での電流(この場合零)

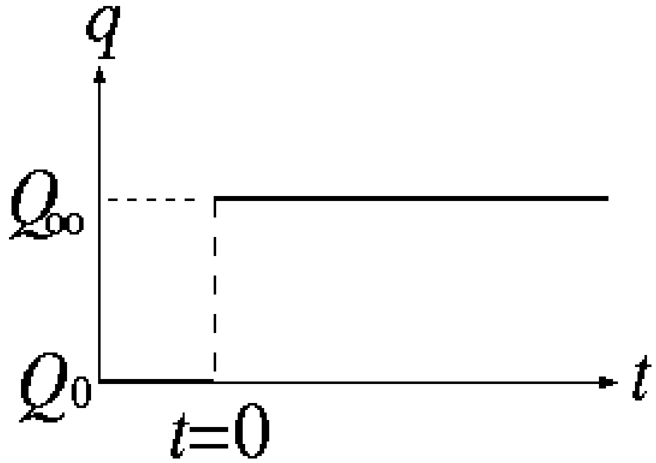
I_∞=E/R: t=∞での電流

⇩

$$i = I_\infty u(t)$$

t=0でSW on

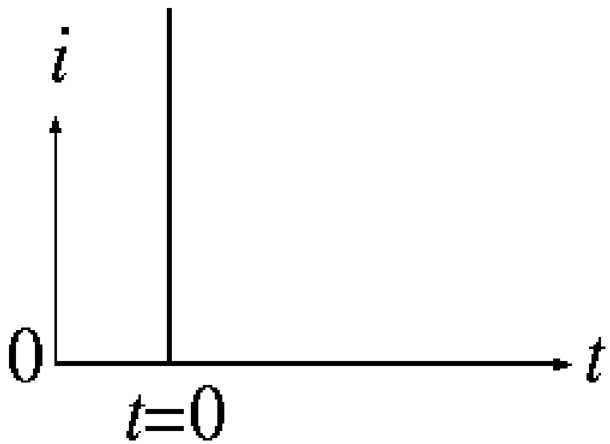




$E = C^{-1}q$であるから、

$$q = (Q_\infty - Q_0)u(t) + Q_0$$

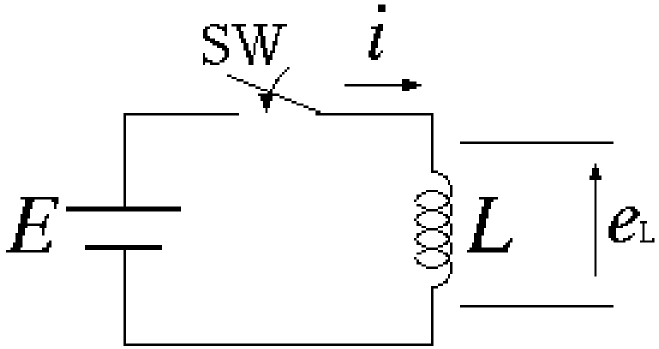
$$i = \frac{dq}{dt} = (Q_\infty - Q_0)\delta(t)$$

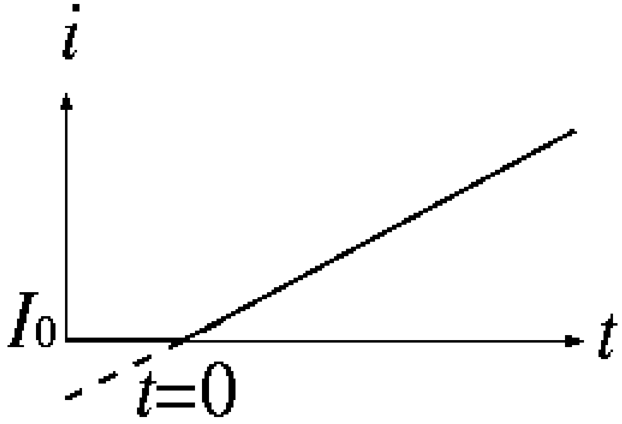


Q_0:　t=0での電荷(零とは限らない！)

$Q_\infty = CE$:　$t=\infty$での電荷

t=0でSW on





$$E = L\frac{di}{dt}$$ であるから、

$$i = \frac{E}{L}\int dt + i_0 = \frac{E}{L}tu(t) + I_0$$

I_0: t=0での電流(この場合零)

⇩

$$i = \frac{E}{L}tu(t)$$

線形1階微分方程式を解く（その２）

$$\frac{dx}{dt} + ax = 0$$

$$\frac{1}{x}dx = -adt$$ と変形

両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{x}dx = \int -adt + c$$

$$\log x = -at + c$$

$$x = \exp(-at + c) = C\exp(-at)$$ C=exp(c)：積分定数

線形1階微分方程式を解く（その3）

$$\frac{dx}{dt} + ax = V$$

⇩

$x = X_\infty + x_\mathrm{t}$ と表現

$X_\infty = V/a$ t=∞での解（定常解）

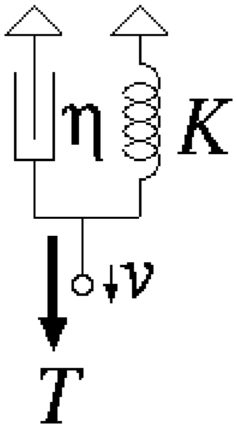
⇩ d/dt=0の時の解

$$\frac{dx_\mathrm{t}}{dt} + ax_\mathrm{t} = 0$$

⇩

$x_\mathrm{t} = C\exp(-at)$ 過渡的な解（過渡解）

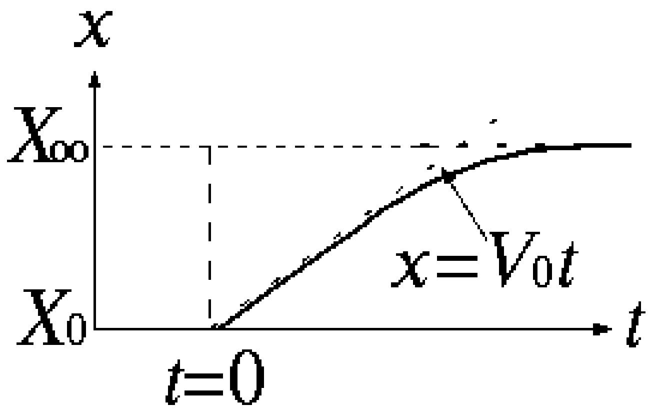
$$x = X_\infty + C\exp(-at)$$



t=0で力印加

$T = Kx + \eta v$

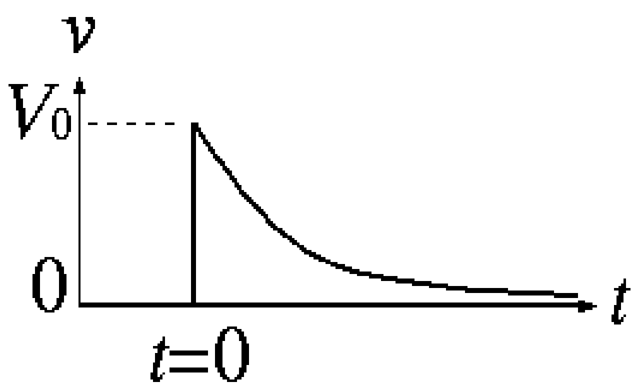
$v = dx/dt$



$$\frac{dx}{dt} + \frac{K}{\eta}x = \frac{T}{\eta}$$ から

$$x = X_0 + (X_\infty - X_0)\{1 - \exp(-t/\tau)\}u(t)$$

$$V = V_0 \exp(-t/\tau)u(t)$$

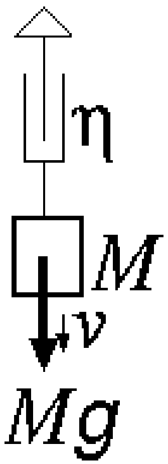


X_0: t=0でののび

$X_\infty = T/K$: $t=\infty$でののび

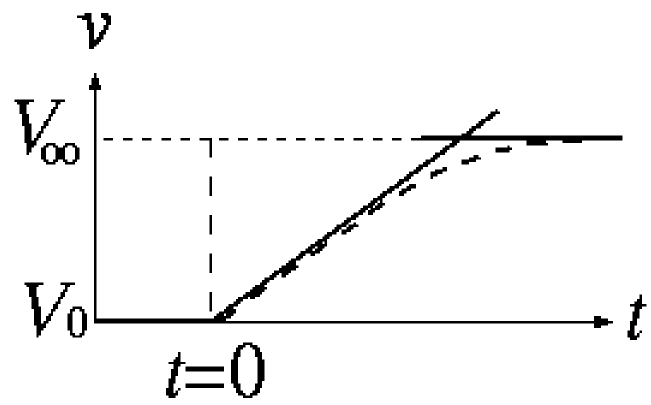
$V_0 = \tau^{-1}(X_\infty - X_0)$: $t=0^+$での速度

$\tau = \eta/K$: 時定数



t=0で力印加

$Mg = M dv/dt + \eta v$



$$\frac{dv}{dt} + \frac{\eta}{M} v = g \text{ から}$$

$$v = V_0 + (V_\infty - V_0)\exp(-t/\tau)u(t)$$

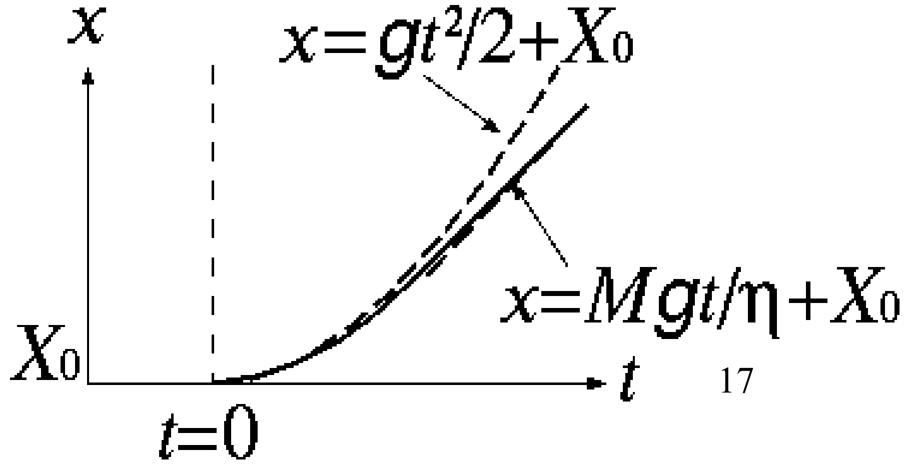
$$x = \left[V_\infty t - \tau (V_\infty - V_0)\{1 - \exp(-t/\tau)\}\right] u(t) + X_0$$

X_0: t=0でののび

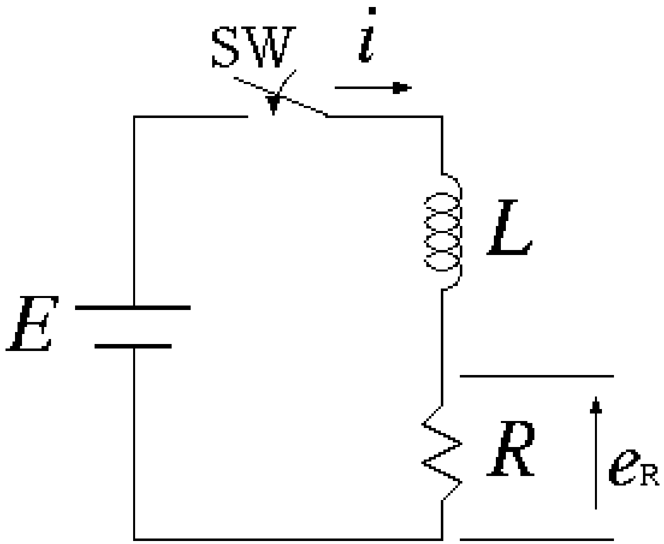
V_0: t=0での速度

$V_\infty = gM/\eta$: $t=\infty$での速度

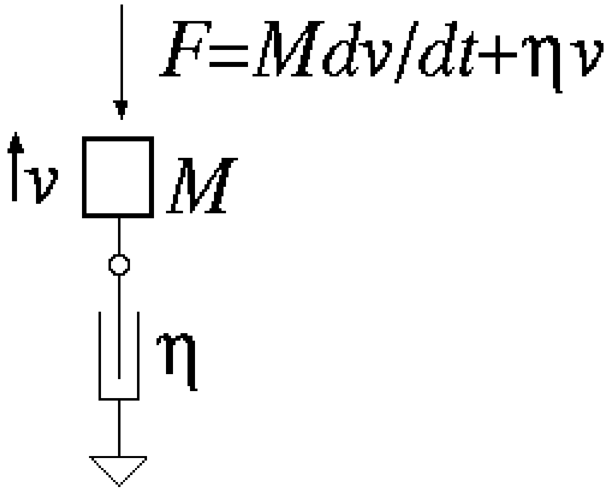
$\tau = M/\eta$:　時定数



t=0でSW on



$\Longleftrightarrow$



機械系の等価な問題

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E$$ から

$$i=(I_\infty-I_0)\{1-\exp(-Rt/L)\}u(t)+I_0$$

$\Downarrow$

$$e_\mathrm{R}=Ri=E\{1-\exp(-t/\tau)\}u(t)$$

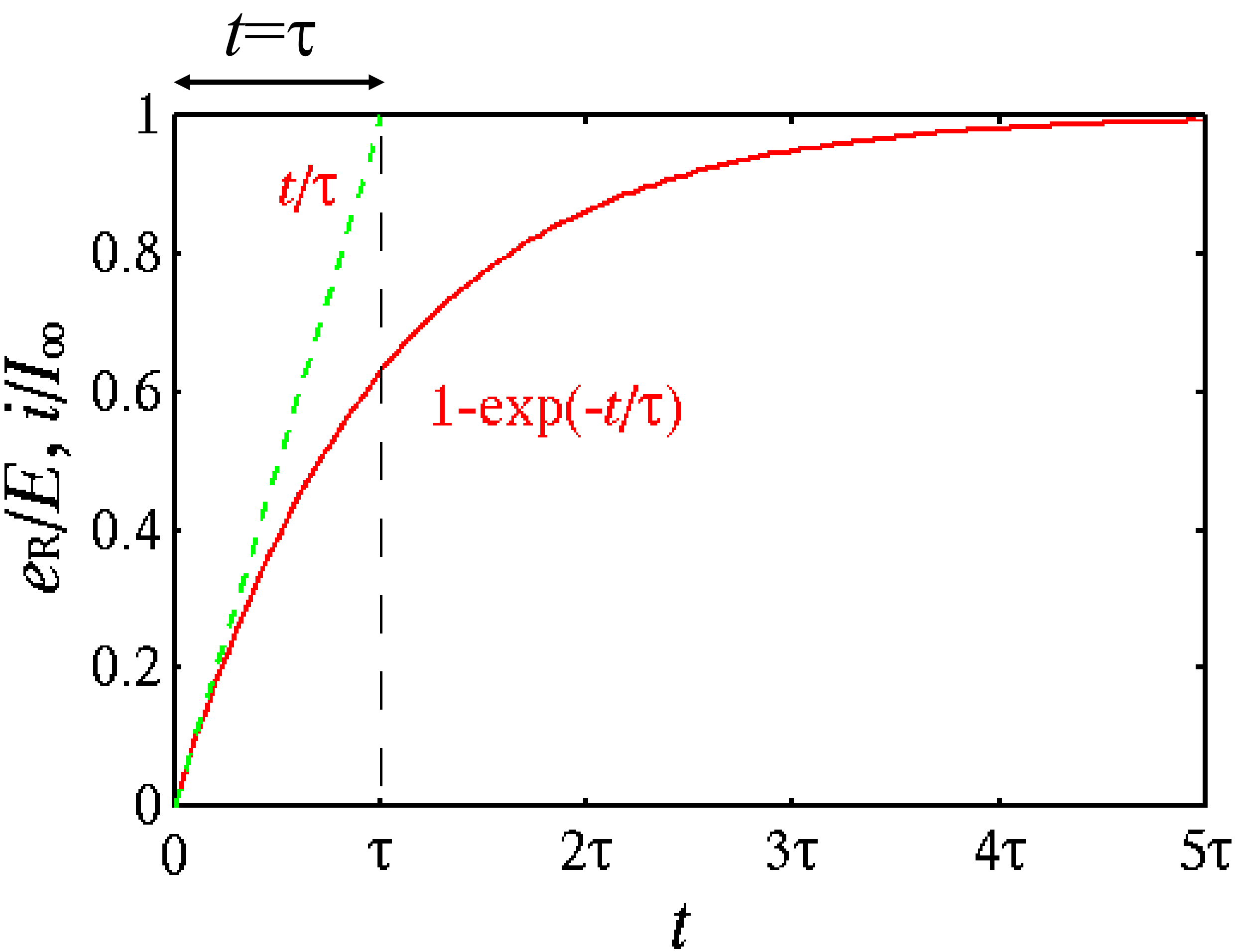
$$e_\mathrm{L}=L\frac{di}{dt}=E\exp(-t/\tau)u(t)$$

I_0: t=0での電流(この場合零)

$I_\infty=E/R$: $t=\infty$での電流

$\tau=L/R$: 時定数

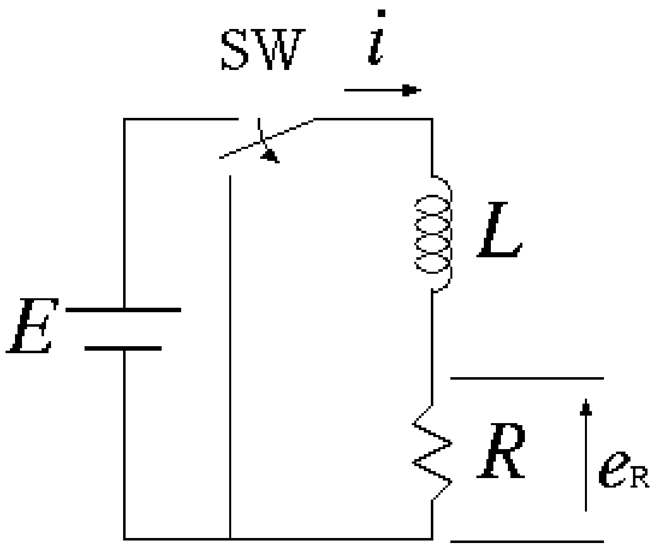
過渡応答波形



$\exp(x)=1+x$ ($|x|<<1$)から、$t<<\tau$の時

$$e_{\mathrm{R}} = E\{1-\exp(-t/\tau)\}u(t) \approx E(t/\tau)u(t)$$

t=0でSW off



$$L\frac{di}{dt}+Ri=0$$ から

$$i=\begin{cases} I_0 & t<0 \\ I_0\exp(-t/\tau) & t>0 \end{cases}$$

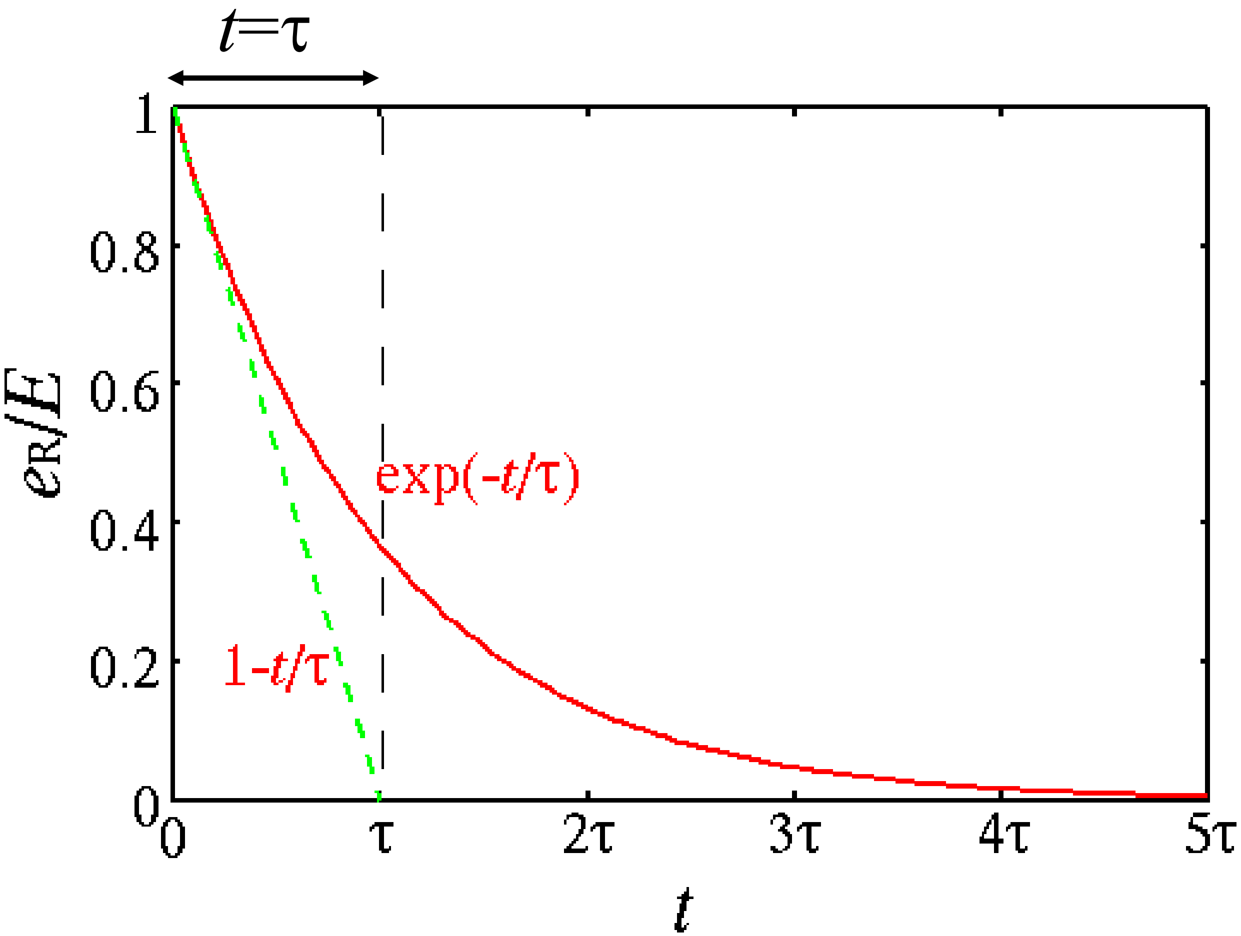
$$e_R=Ri=\begin{cases} E & t<0 \\ E\exp(-t/\tau) & t>0 \end{cases}$$

$$e_L=L\frac{di}{dt}=\begin{cases} 0 & t<0 \\ -E\exp(-t/\tau) & t>0 \end{cases}$$

I_0: t=0での電流(SW on後、十分時間を経過した後ではE/R)

$\tau=L/R$:　時定数

過渡応答波形



exp(x)=1+x (|x|<<1)から、t<<τの時

$$e_{\mathrm{R}} = E\exp(-t/\tau) \approx E(1-t/\tau)$$

$$i = \frac{E}{R}\exp(-t/\tau)u(t)$$ より

W_{L}: t=0でのインダクタへの蓄積エネルギー
W_{R}: 抵抗で消費されたエネルギー

$$W_{\mathrm{L}} = \frac{LI_0^2}{2}$$

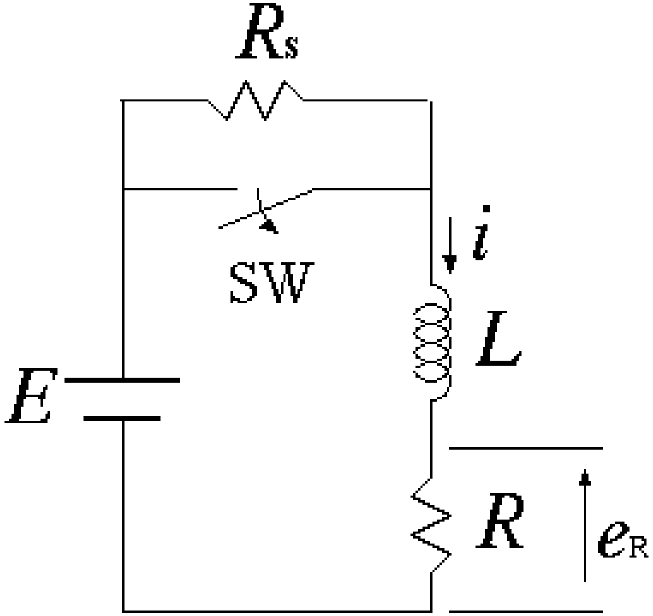
$$W_{\mathrm{R}} = \int_0^\infty Ri^2 dt = RI_0^2 \int_0^\infty \exp(-2t/\tau)dt = \frac{R\tau I_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$$

エネルギー保存則

t=0でSW off

$$L\frac{di}{dt}+(R+R_s)i=E$$ から、t>0で

$$i=I_\infty+(I_0-I_\infty)\exp\{-(R+R_s)t/L\}$$



I_0: t=0での電流(SW on後、十分時間を経過した後ではE/R)

$I_\infty=E/(R+R_s)$: $t=\infty$での電流

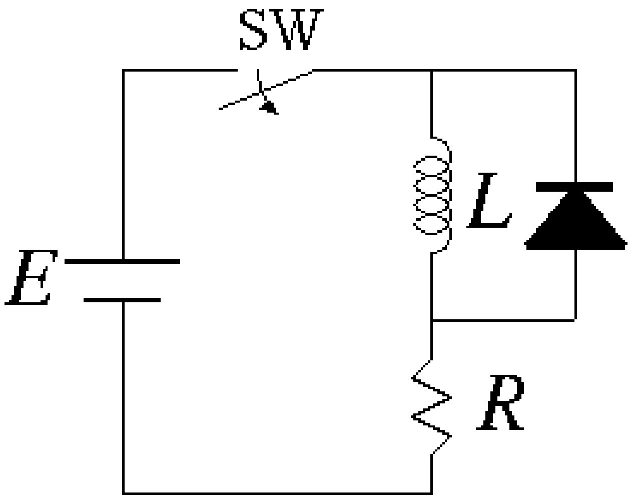
$\tau=L/(R+R_s)$: 時定数

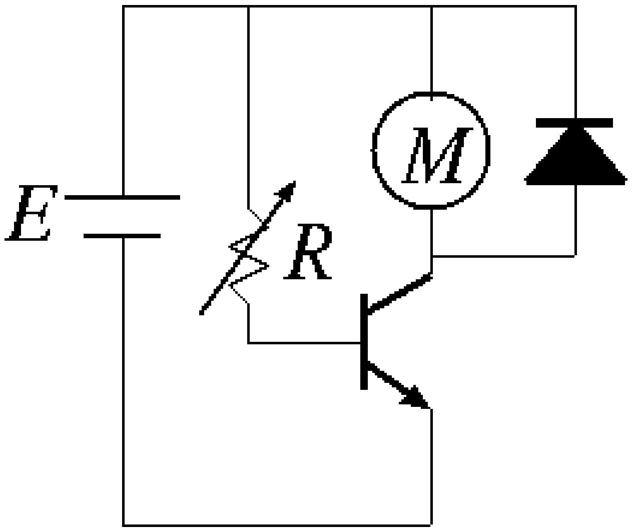
$R_s>>R$を仮定すると、t>0でSW両端の電位差e_{SW}は

$$e_{SW}=R_s i\approx E[1+(R_s/R)\exp(-R_s t/L)]$$

$R_s\Rightarrow\infty$の時、$t=0^+$で$e_{SW}\Rightarrow\infty$。即ち、放電の発生

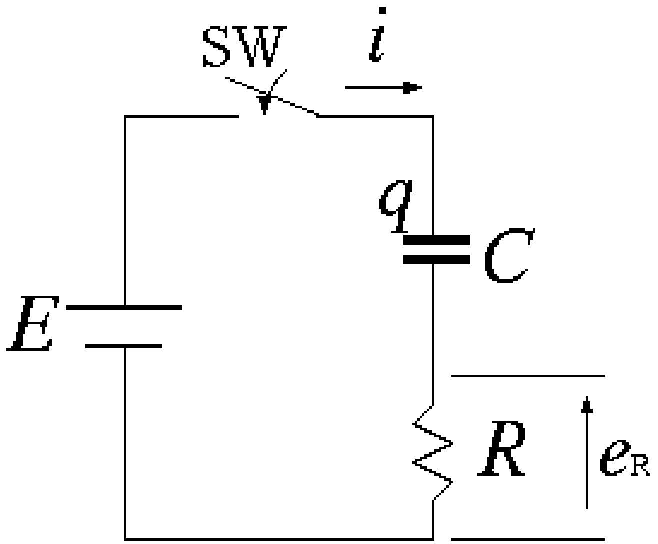
モータ、電磁石、リレー等における放電対策例





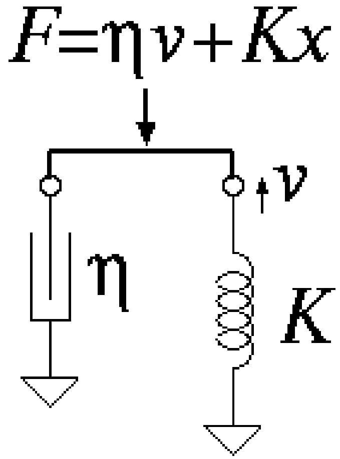
発生した逆起電力をダイオードで短絡

t=0でSW on



⇔

t=0で力印加



$v=dx/dt$

機械系の等価な問題

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E$$ から

$$q=Q_\infty+(Q_0-Q_\infty)\exp(-t/\tau)u(t)$$

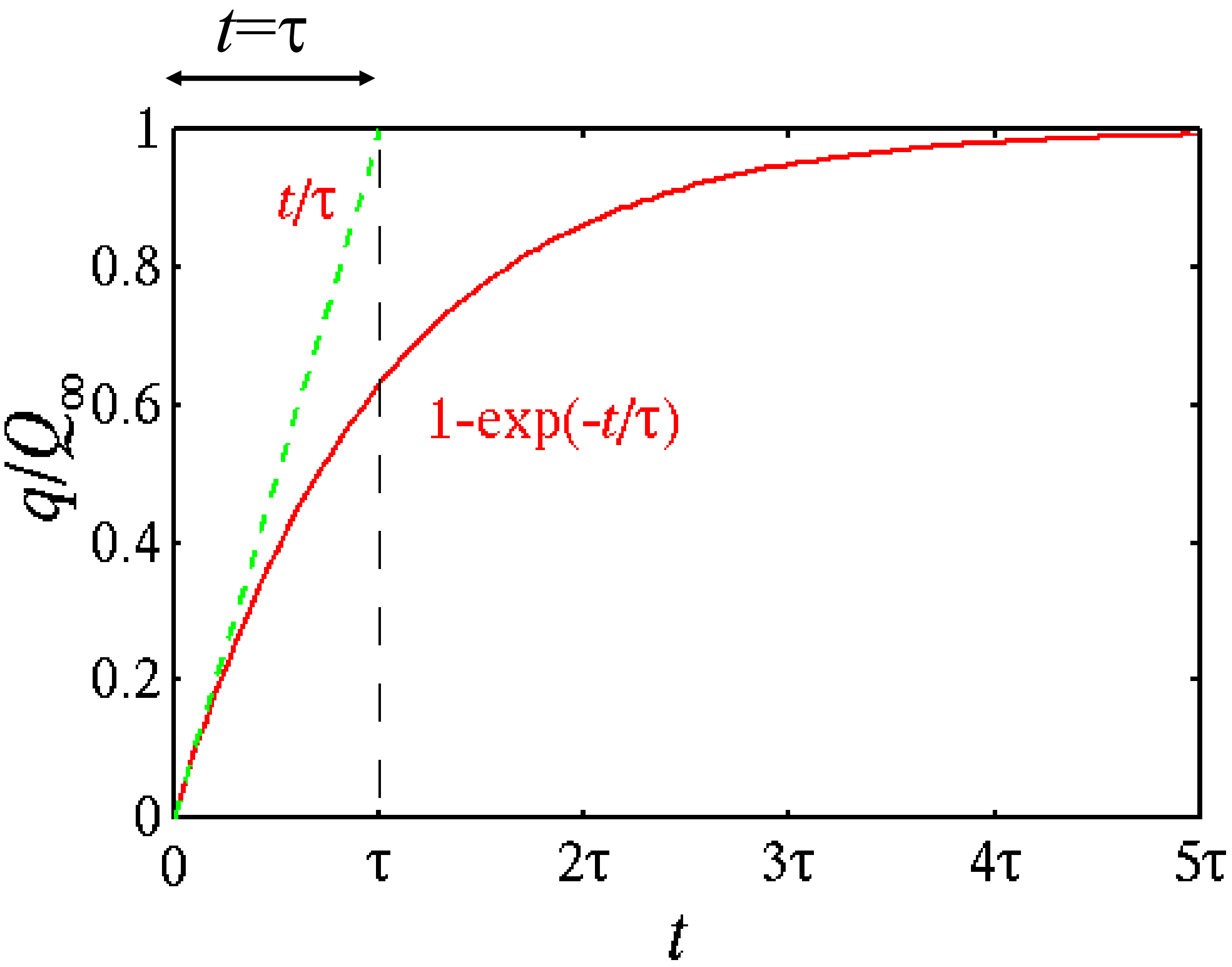
$$i=\frac{dq}{dt}=-\tau^{-1}(Q_0-Q_\infty)\exp(-t/\tau)u(t)$$

Q_0: t=0での電荷

$Q_\infty=CE$: $t=\infty$での電荷

$\tau=CR$: 時定数

過渡応答波形



$$q = Q_\infty + (Q_0 - Q_\infty)\exp(-t/\tau)u(t)$$ より

W_{C0}: t=0での容量への蓄積エネルギー

$W_{\mathrm{C\infty}}$: t=∞での容量への蓄積エネルギー

W_{R}: 抵抗で消費されたエネルギー

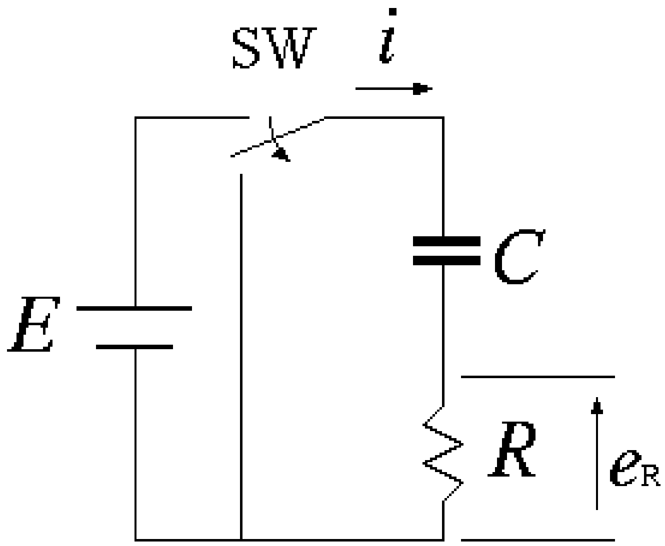
$$W_{C0} = \frac{Q_0^2}{2C}, \quad W_{C\infty} = \frac{Q_\infty^2}{2C}$$

$$W_R = \int_0^\infty R\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 dt = \frac{R\left(Q_\infty - Q_0\right)^2}{\tau^2}\int_0^\infty \exp(-2t/\tau)dt$$

$$= \frac{R\left(Q_\infty - Q_0\right)^2}{2\tau} = \frac{\left(Q_\infty - Q_0\right)^2}{2C}$$

エネルギーの和が合わない理由は？

t=0でSW off



$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0 \quad \text{から}$$

$$q=\begin{cases} Q_0 & t<0 \\ Q_0\exp(-t/\tau) & t>0 \end{cases}$$

$$i=-I_0\exp(-t/\tau)u(t)$$

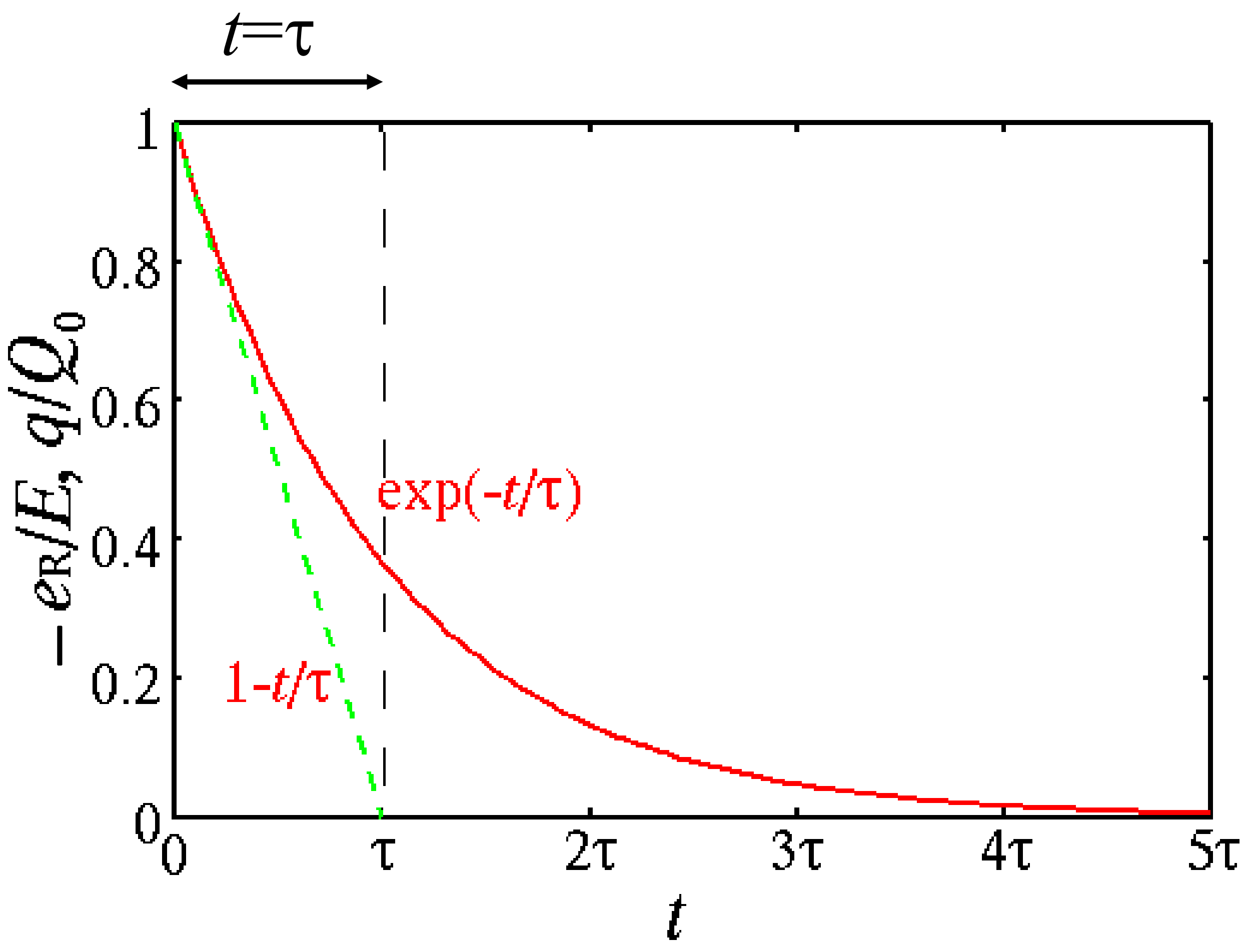
$$e_R=\begin{cases} 0 & t<0 \\ -E\exp(-t/\tau) & t>0 \end{cases}$$

Q_0: t=0での電荷(SW on後、十分時間を経過した後ではCE)

τ=CR: 時定数

I_0=E/R: t=0での電流

過渡応答波形



$$q = Q_0 \exp(-t/\tau)u(t)$$ より

W_{C0}: t=0での容量への蓄積エネルギー
W_{R}: 抵抗で消費されたエネルギー

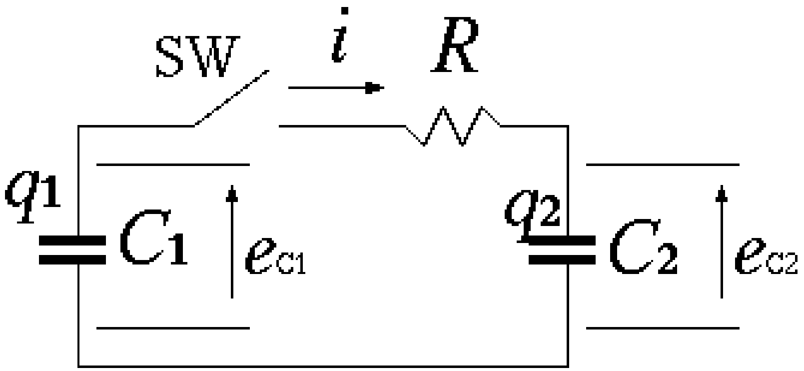
$$W_{C0} = \frac{Q_0^2}{2C}$$

$$W_R = \int_0^\infty R\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 dt = \frac{RQ_0^2}{\tau^2}\int_0^\infty \exp(-2t/\tau)dt$$

$$= \frac{RQ_0^2}{2\tau} = \frac{Q_0^2}{2C}$$

エネルギー保存則

t=0でSW on



$$\frac{1}{C_1}q_1 = R\frac{dq_2}{dt} + \frac{1}{C_2}q_2$$

$q_1 + q_2 = Q_{10} + Q_{20}$ から

Q_{10}: t=0でのC_1の電荷

$$Q_{1\infty} = C_1(Q_{10} + Q_{20})/(C_1 + C_2)$$

Q_{20}: t=0でのC_2の電荷

$$Q_{2\infty} = C_2(Q_{10} + Q_{20})/(C_1 + C_2)$$

$Q_{1\infty}$: t=∞でのC_1の電荷

$Q_{2\infty}$: t=∞でのC_2の電荷

$\tau=(C_1^{-1}+C_2^{-1})^{-1}R$: 時定数

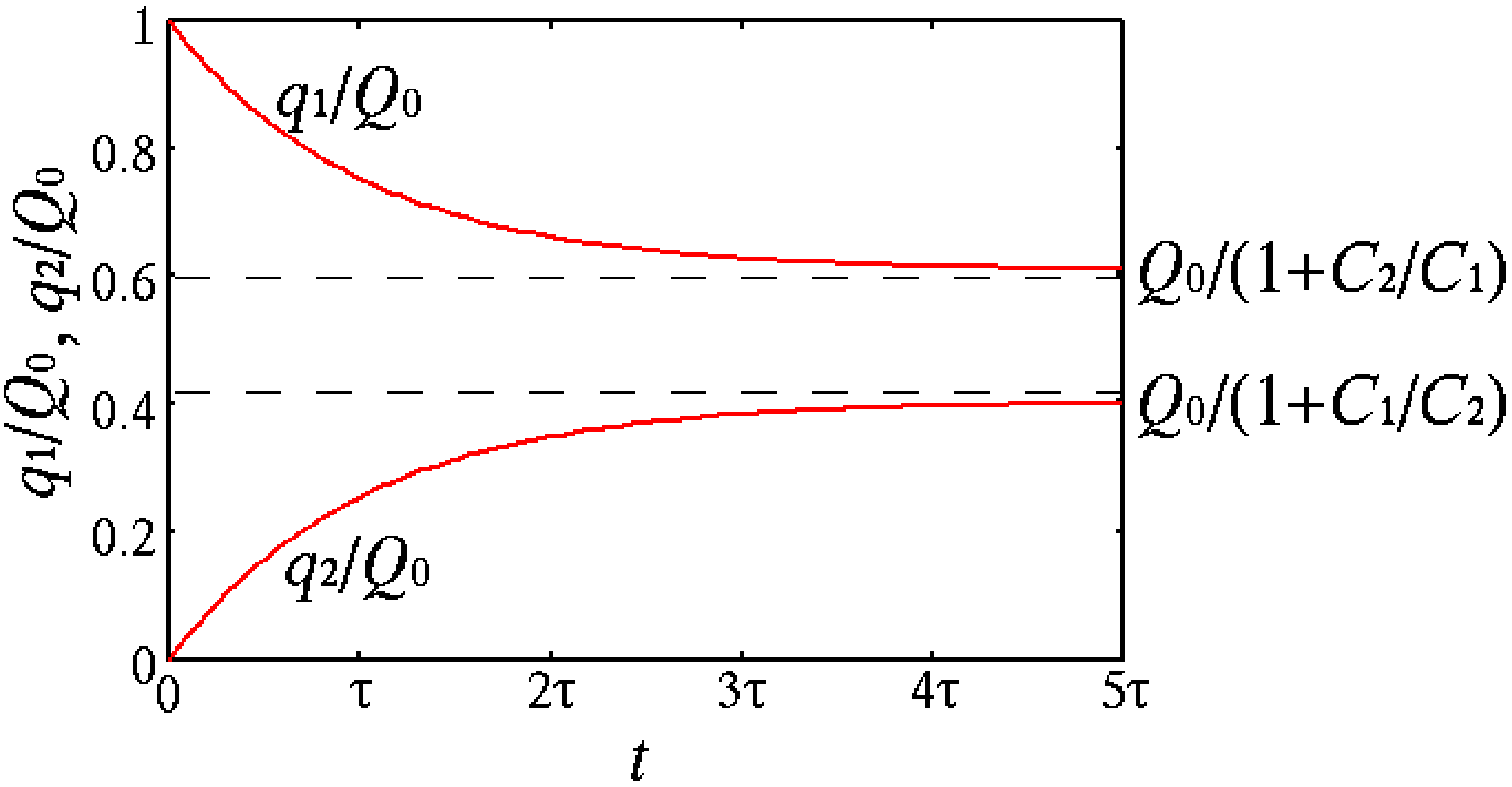
$$q_1 = Q_{1\infty} + (Q_{10} - Q_{1\infty})\exp(-t/\tau)$$

$$q_2 = Q_{2\infty} + (Q_{20} - Q_{2\infty})\exp(-t/\tau)$$

⇩

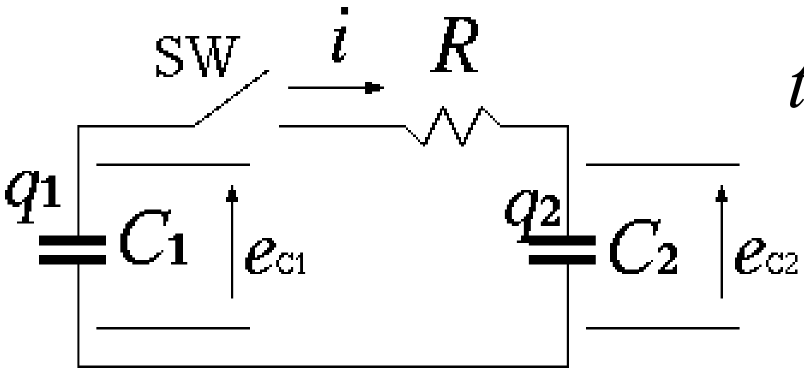
$$i = -\tau^{-1}(Q_{20} - Q_{2\infty})\exp(-t/\tau)$$

過渡応答波形



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
$q_1/Q_0,\ q_2/Q_0$
q_1/Q_0
q_2/Q_0
$Q_0/(1+C_2/C_1)$
$Q_0/(1+C_1/C_2)$
0
τ
2τ
3τ
4τ
5τ
t

Cへの蓄積エネルギーとRでの消費エネルギー



t=0でSW on

$$Q_{10} + Q_{20} = Q_{1\infty} + Q_{2\infty}$$

であることに注意すると

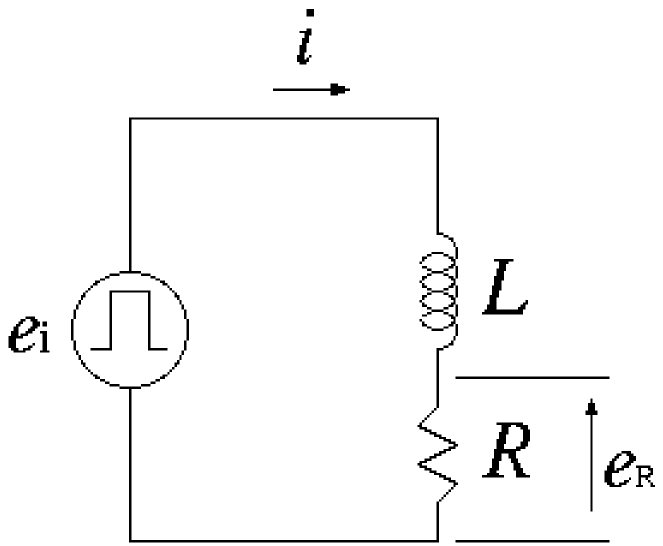
$$W_{\mathrm{C1}} = \frac{1}{2} C_1^{-1} q_1^2 = \frac{1}{2} C_1^{-1} \left\{ Q_{1\infty} + (Q_{10} - Q_{1\infty}) \exp(-t/\tau) \right\}^2$$

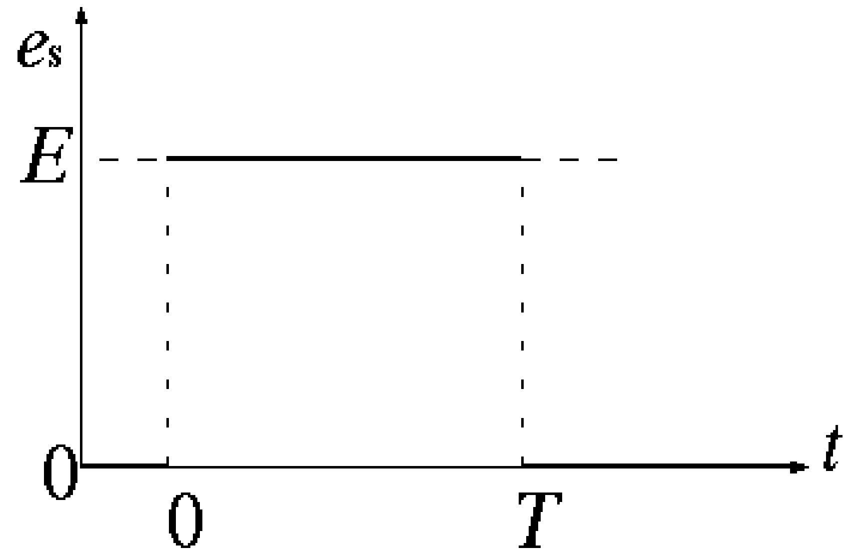
$$W_{\mathrm{C2}} = \frac{1}{2} C_2^{-1} q_2^2 = \frac{1}{2} C_2^{-1} \left\{ Q_{2\infty} + (Q_{20} - Q_{2\infty}) \exp(-t/\tau) \right\}^2$$

$$W_{\mathrm{R}} = \int_0^t R i^2 dt = \frac{R}{2\tau} (Q_{20} - Q_{2\infty})^2 \{1 - \exp(-2t/\tau)\}$$

$$\Downarrow$$

$$W_{\mathrm{C1}} + W_{\mathrm{C2}} + W_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2} C_1^{-1} Q_{10}^2 + \frac{1}{2} C_2^{-1} Q_{20}^2$$





$0<t<T$では $L\dfrac{di}{dt}+Ri=E$

$\Rightarrow \quad i=\dfrac{E}{R}[1-\exp(-t/\tau)]$ $\tau=L/R$: 時定数

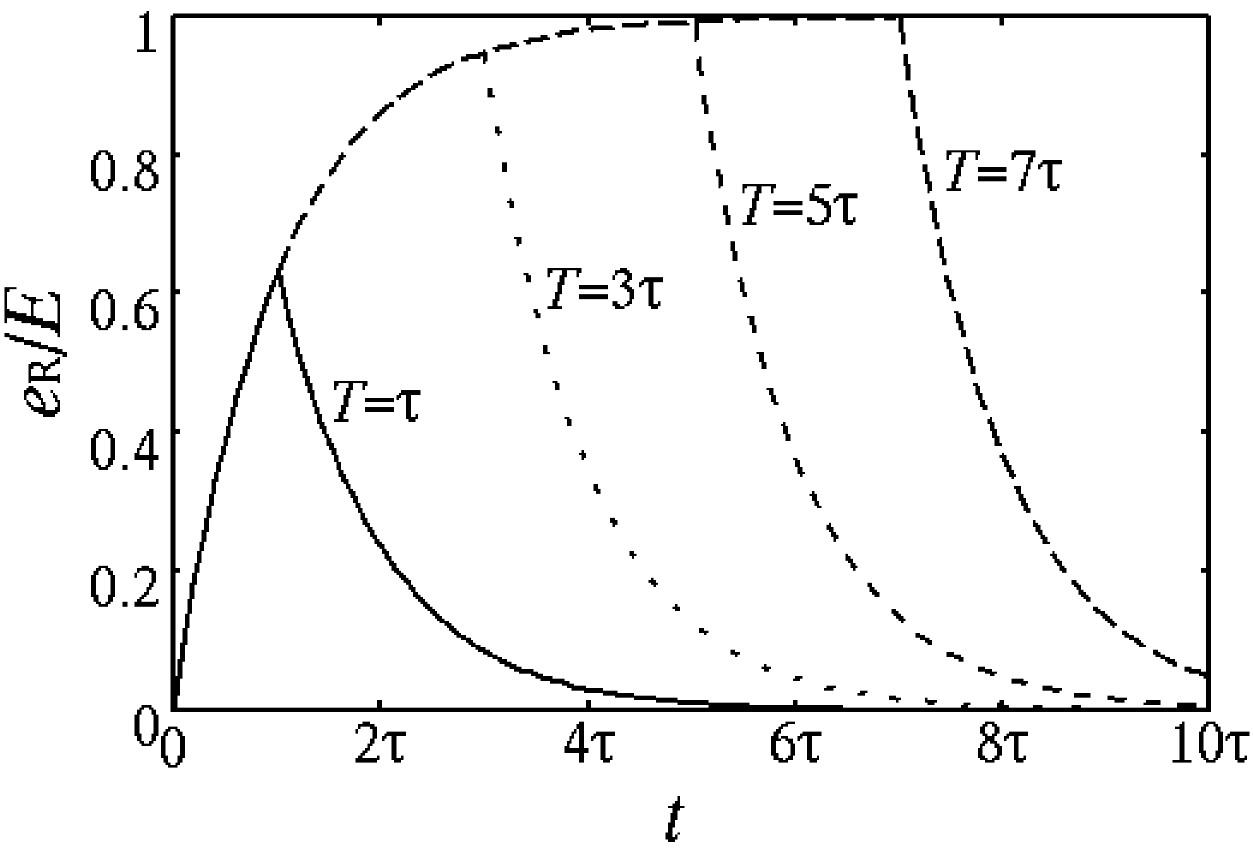
$t>T$では $L\dfrac{di}{dt}+Ri=0$ $t=T$でiが連続から

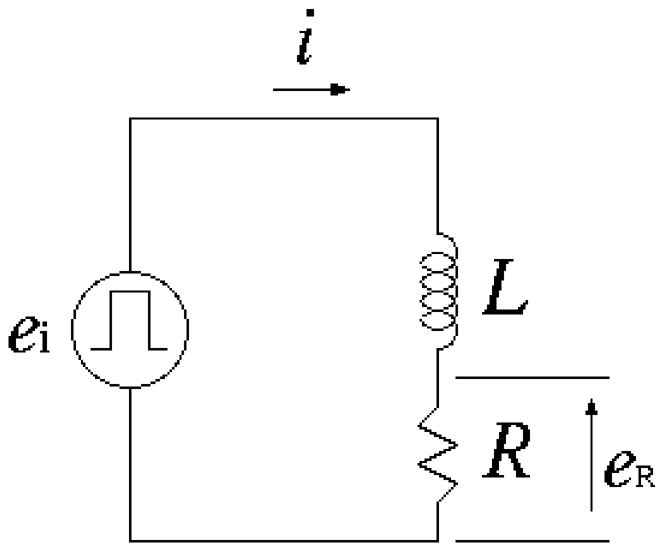
$$\Rightarrow \quad i=i\big|_{t=T-}\exp\{-(t-T)/\tau\}$$

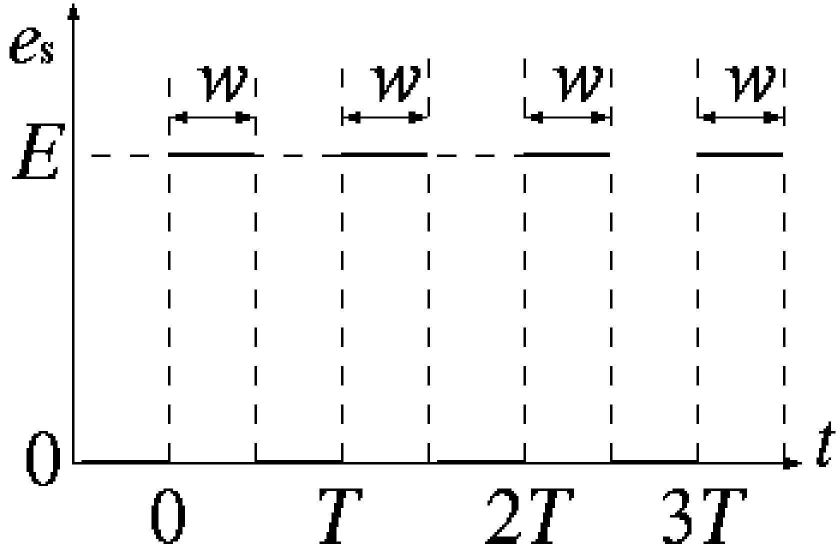
$$=\frac{E}{R}[\exp(T/\tau)-1]\exp(-t/\tau)$$

0<*t*<*T*では $e_\mathrm{R} = Ri = E[1 - \exp(-t/\tau)]$

t>*T*では $e_\mathrm{R} = Ri = E[\exp(T/\tau) - 1]\exp(-t/\tau)$







$0<t<w$では $\quad L\dfrac{di}{dt}+Ri=E \quad$ t=0でiが連続から

$$\Rightarrow \quad i=\frac{E}{R}+\left(i\Big|_{t=T^-}-\frac{E}{R}\right)\exp(-t/\tau)$$ τ=L/R: 時定数

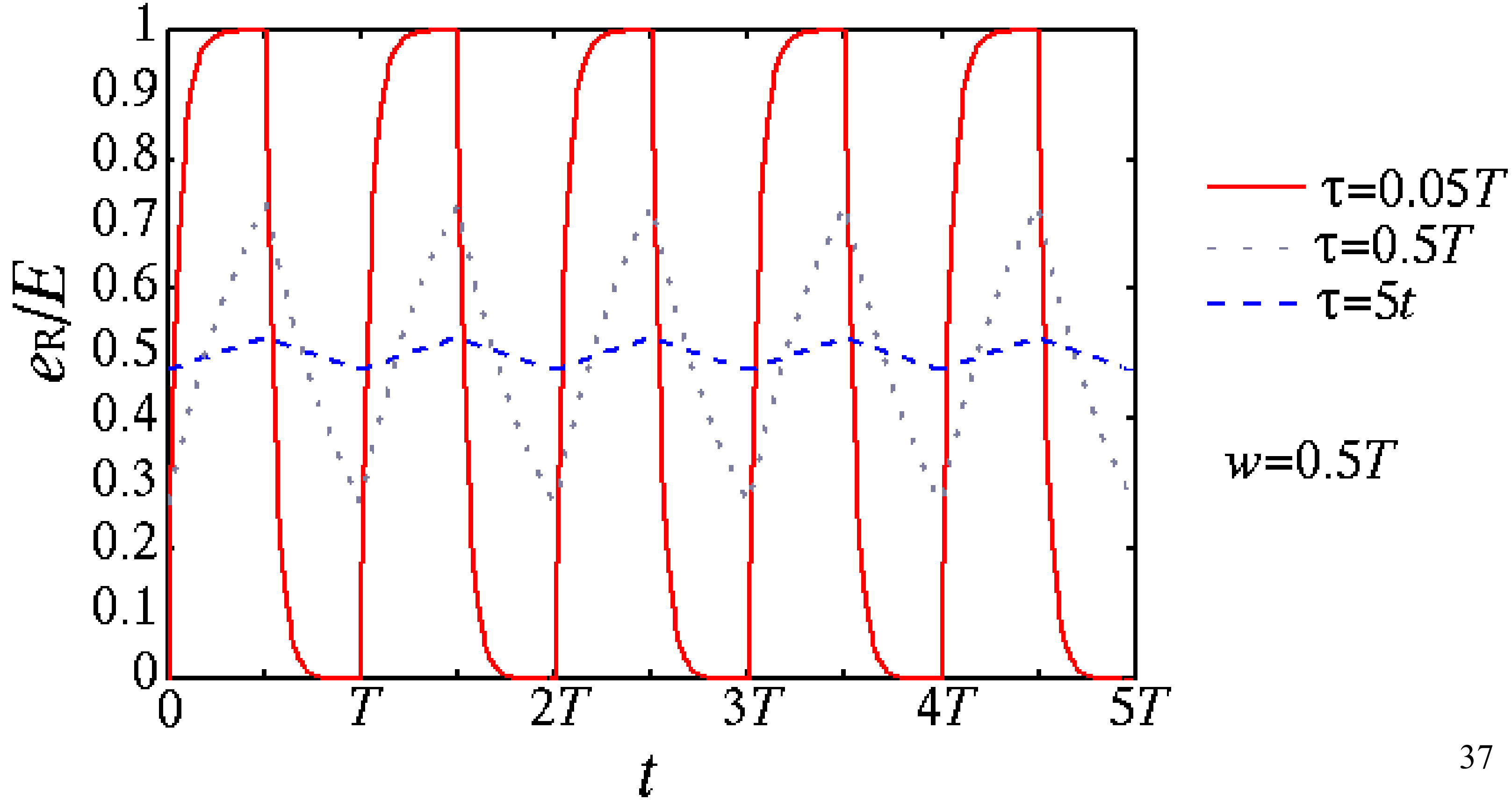
$w<t<T$では $\quad L\dfrac{di}{dt}+Ri=0 \quad$ t=Tでiが連続から

$$\Rightarrow \quad i=i\Big|_{t=T^-}\exp\{-(t-T)/\tau\}$$

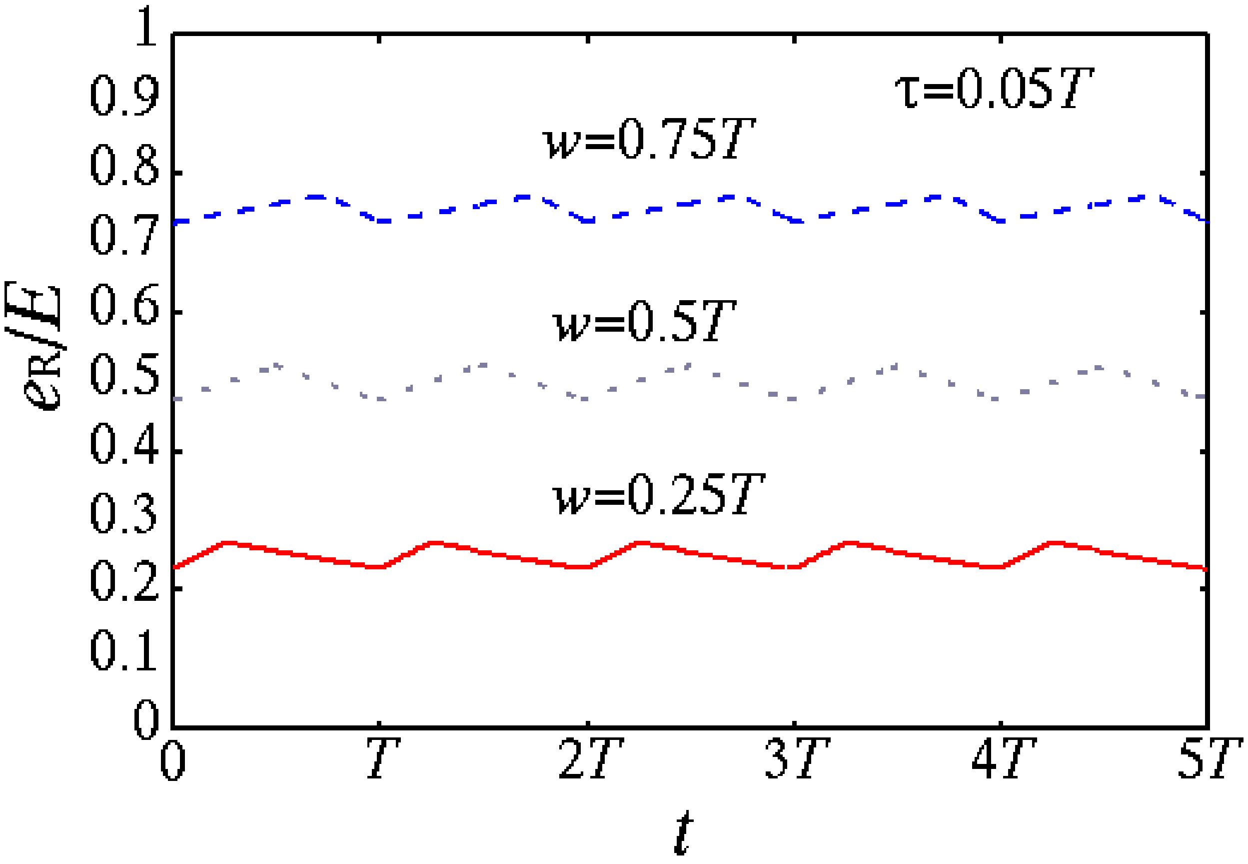
t=wでiが連続より $\quad i\Big|_{t=T^-}=\dfrac{E\{\exp(w/\tau)-1\}}{R\{\exp(T/\tau)-1\}}$

$0<t<w$では $e_{\mathrm{R}} = Ri = E + E\dfrac{\exp(w/\tau) - \exp(T/\tau)}{\exp(T/\tau) - 1}\exp(-t/\tau)$

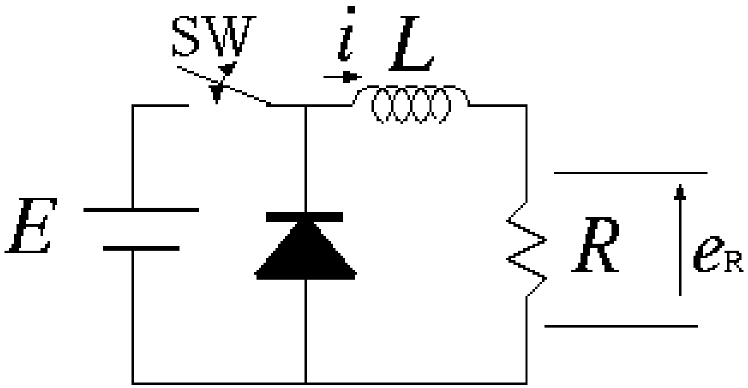
$w<t<T$では $e_{\mathrm{R}} = Ri = \dfrac{E\{\exp(w/\tau) - 1\}}{\exp(T/\tau) - 1}\exp\{-(t-T)/\tau\}$



w/Tを調整すると



平均値(直流成分)が変化！



降圧型DC-DCコンバータ

直流成分

$$e_{\mathrm{DC}} = \overline{e_{\mathrm{R}}(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T e_{\mathrm{R}}(t)dt$$

出力電圧の実効値

$$e_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\overline{e_{\mathrm{R}}(t)^2}}$$

脈動成分 (実効値)

$$e_{\mathrm{AC}} = \sqrt{\overline{\left\{e_{\mathrm{R}}(t) - e_{\mathrm{DC}}\right\}^2}} = \sqrt{e_{\mathrm{RMS}}^2 - e_{\mathrm{DC}}^2}$$

$T << \tau$の時

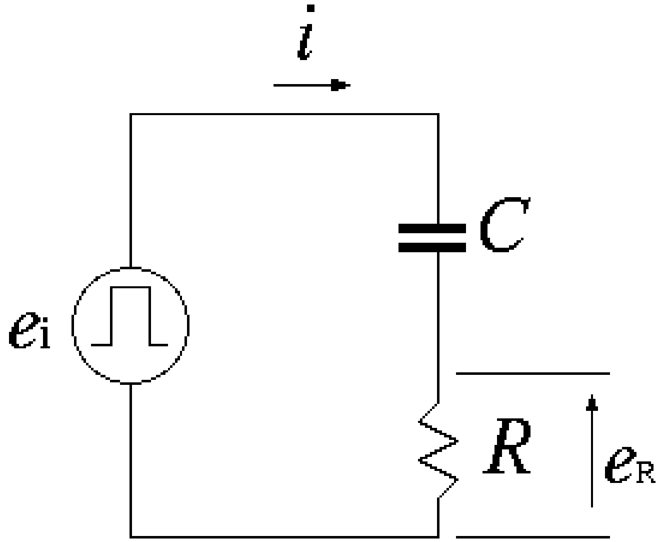
$0<t<w$では
$$e_{\mathrm{R}} \cong E\frac{w}{T} + E\frac{T-w}{\tau T}t$$

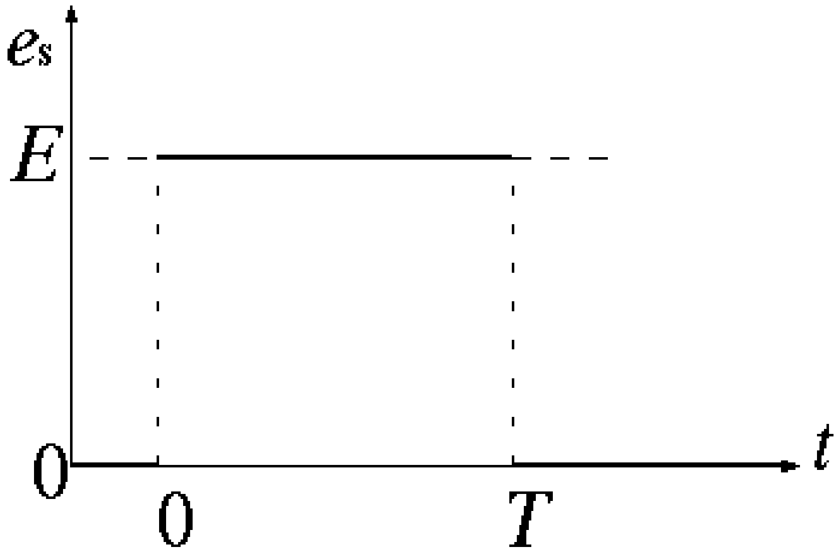
$w<t<T$では
$$e_{\mathrm{R}} \cong \frac{Ew}{T} - E\frac{w}{\tau T}(t-T)$$

$$e_{\mathrm{DC}} \cong E\frac{w}{T}\left\{1 + \frac{T-w}{2\tau}\right\}$$

$$e_{\mathrm{RMS}} \cong E\frac{w}{T}\sqrt{1 + \frac{T-w}{\tau}}$$

$$e_{\mathrm{AC}} \cong E\frac{w}{T}\sqrt{\frac{T-w}{\tau}}$$





$0<t<T$では $R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{1}{C}q=E$ $t=0$で$q=0$から

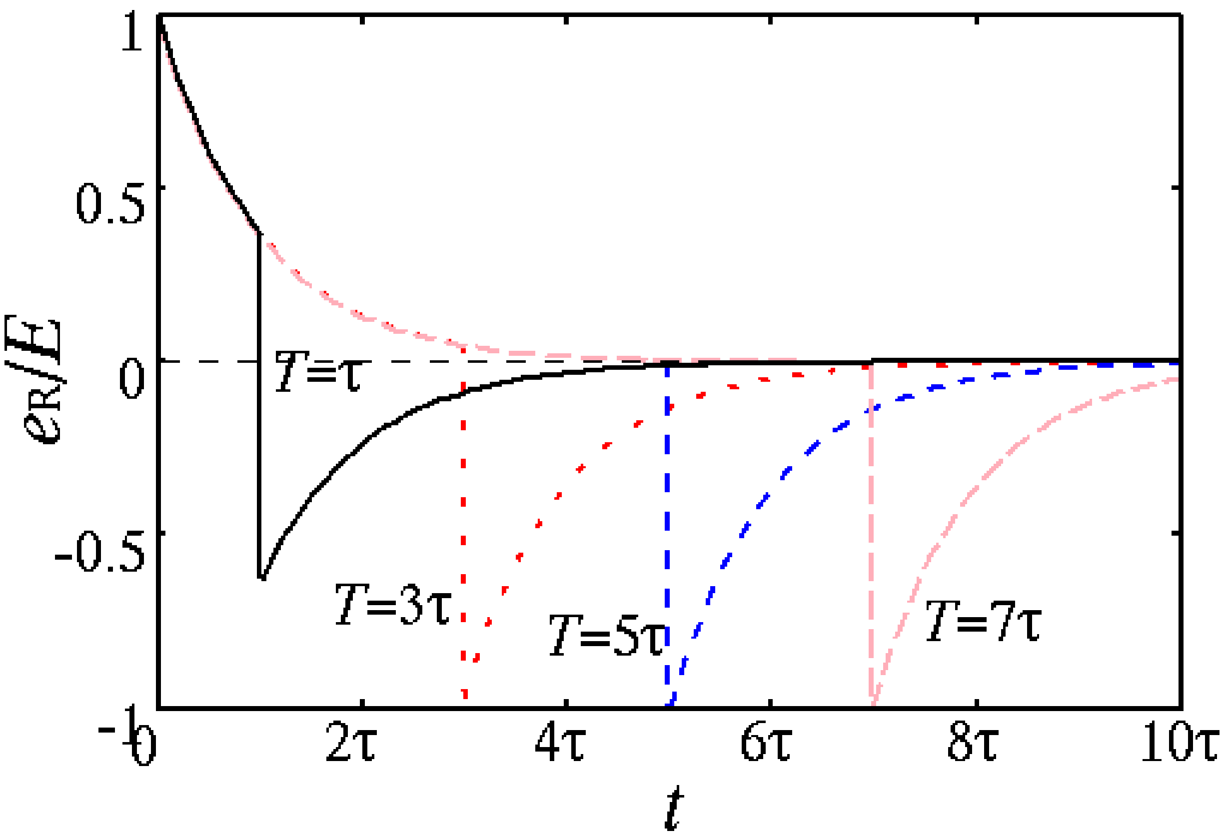
⇨ $q=CE\left[1-\exp(-t/\tau)\right]$ $\tau=CR$: 時定数

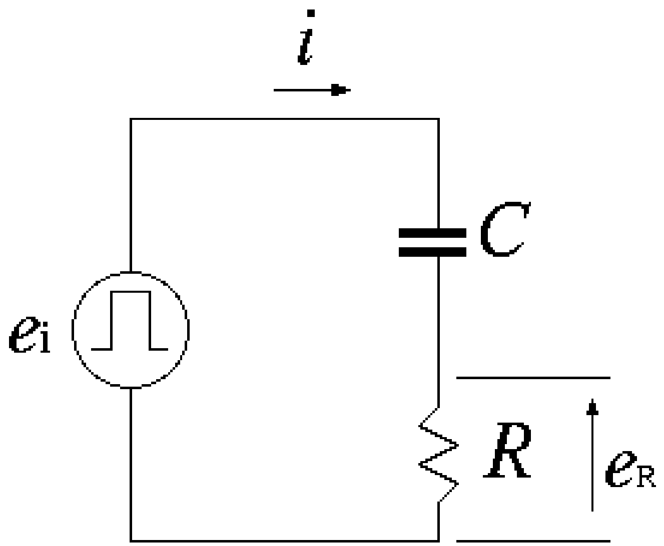
$t>T$では $R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{1}{C}q=0$ $t=T$でqが連続から

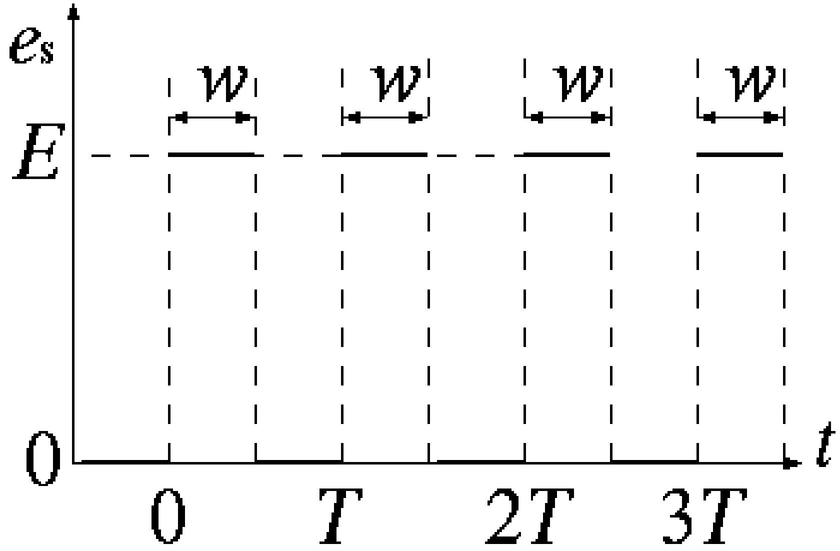
⇨
$$\begin{aligned} q &= q\big|_{t=T^-}\exp\{-(t-T)/\tau\} \\ &= CE\left[1-\exp(-T/\tau)\right]\exp\{-(t-T)/\tau\} \end{aligned}$$

$0<t<T$では $e_{\mathrm{R}} = R\dfrac{dq}{dt} = E\exp(-t/\tau)$

$t>T$では $e_{\mathrm{R}} = R\dfrac{dq}{dt} = -E\left[1-\exp(-T/\tau)\right]\exp\{-(t-T)/\tau\}$







$0<t<w$では $R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{1}{C}q=E$　t=0でqが連続から

$$\Rightarrow \quad q=CV+\left(q\big|_{t=T^-}-CE\right)\exp(-t/\tau)$$ τ=CR: 時定数

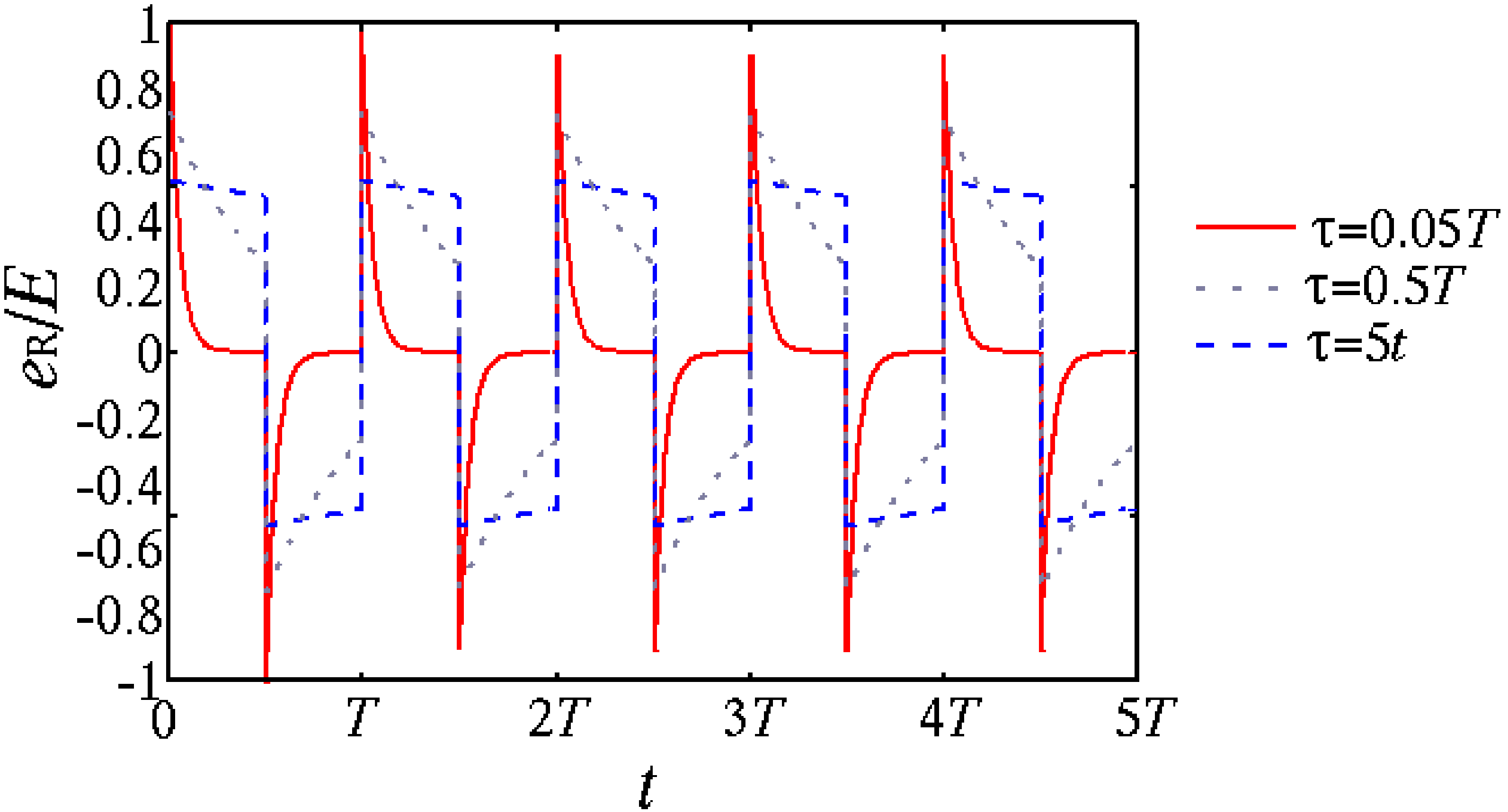
$w<t<T$では $R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{1}{C}q=0$　t=Tでqが連続から

$$\Rightarrow \quad q=q\big|_{t=T^-}\exp\{-(t-T)/\tau\}$$

t=wでiが連続より $q\big|_{t=T^-}=\dfrac{CE[\exp(w/\tau)-1]}{\exp(T/\tau)-1}$

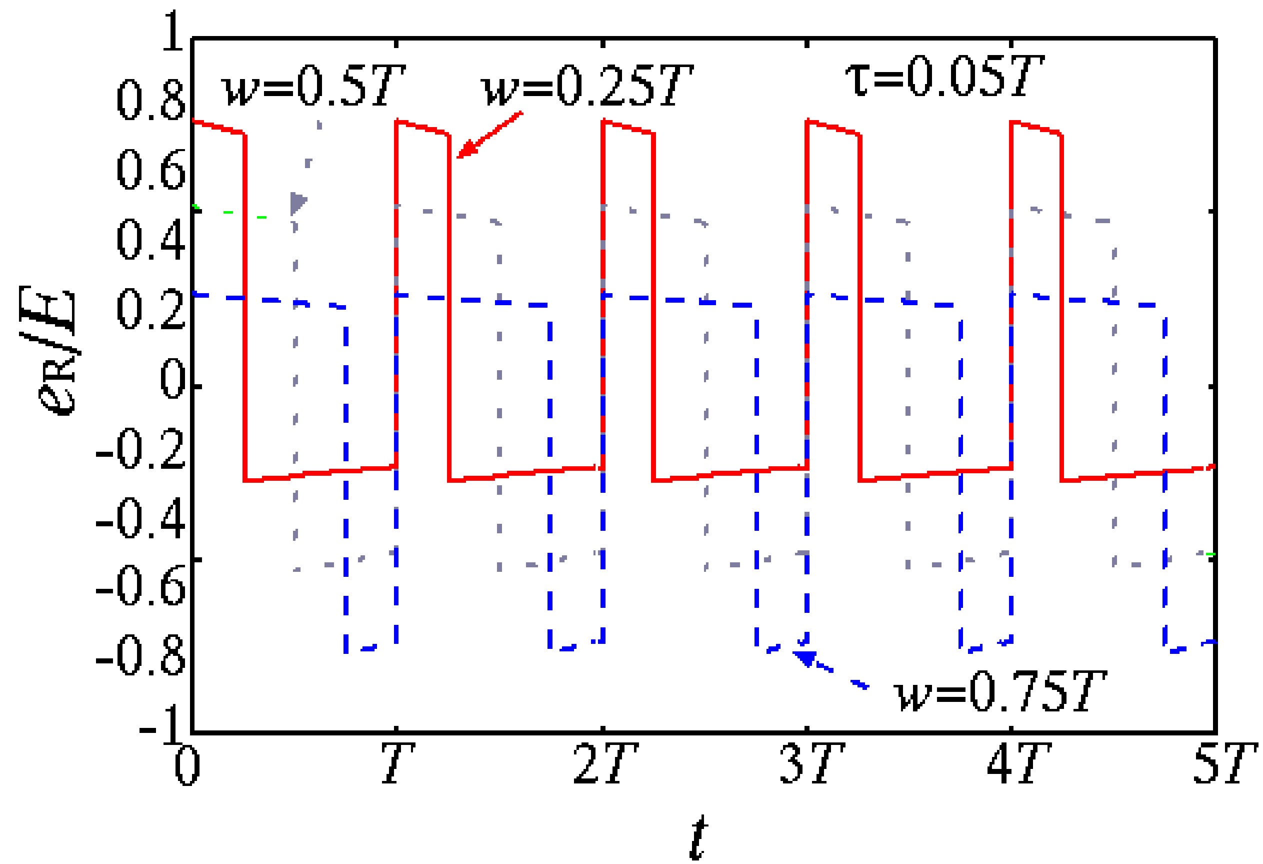
$0<t<w$では $e_R = R\dfrac{dq}{dt} = E\dfrac{\exp(T/\tau) - \exp(w/\tau)}{\exp(T/\tau) - 1}\exp(-t/\tau)$

$w<t<T$では $e_R = R\dfrac{dq}{dt} = -E\dfrac{\exp(w/\tau) - 1}{\exp(T/\tau) - 1}\exp\{-(t-T)/\tau\}$

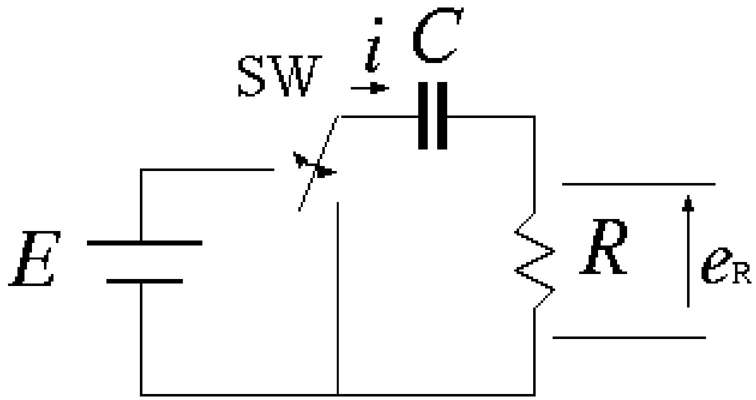


τ>>Tの時、矩形波の生成

w/Tを調整すると



コンデンサは直流を通さないので、
直流成分(平均値)は零



インバータ;直流から交流を生成

線形1階微分方程式を解く(その4)

$$\frac{dx}{dt} + f(t)x = 0$$

$$\frac{1}{x}dx = -f(t)dt$$ と変形

両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{x}dx = \int -f(t)dt + c$$

$$x = \exp(-at + c) = C\exp(-at)$$

$$\log x = -\int f(t)dt + c$$

$$x = \exp\left\{-\int f(t)dt + c\right\} = C\exp\left\{-\int f(t)dt\right\}$$

C=exp(c):積分定数

線形1階微分方程式を解く（その5）

$$\frac{dx}{dt}+ax=V\sin(\omega_\mathrm{s}t)$$

$$\Downarrow$$

$x=x_\infty(t)+x_\mathrm{t}(t)$ と表現

$x_\infty(t)=\mathrm{Im}[V\exp(j\omega_\mathrm{s}t)/(j\omega_\mathrm{s}+a)]$ $t=\infty$での解（定常解）

$$\Downarrow$$

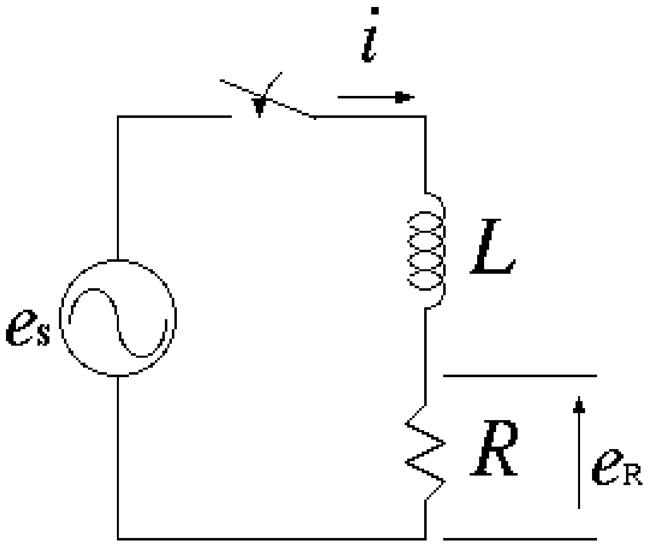
$$\frac{dx_\mathrm{t}}{dt}+ax_\mathrm{t}=0$$

$$\Downarrow$$

$x_\mathrm{t}=C\exp(-at)$ 過渡的な解（過渡解）

$$x=x_\infty(t)+C\exp(-at)$$

t=0でSW on



$e_s = E\sin(\omega_s t)$

I_0: t=0での電流(この場合零)

$i_\infty(t)$: t=∞での定常電流

$\tau = L/R$: 時定数

$$\theta = \tan^{-1}(\omega_s L / R)$$

注:Eは波高値

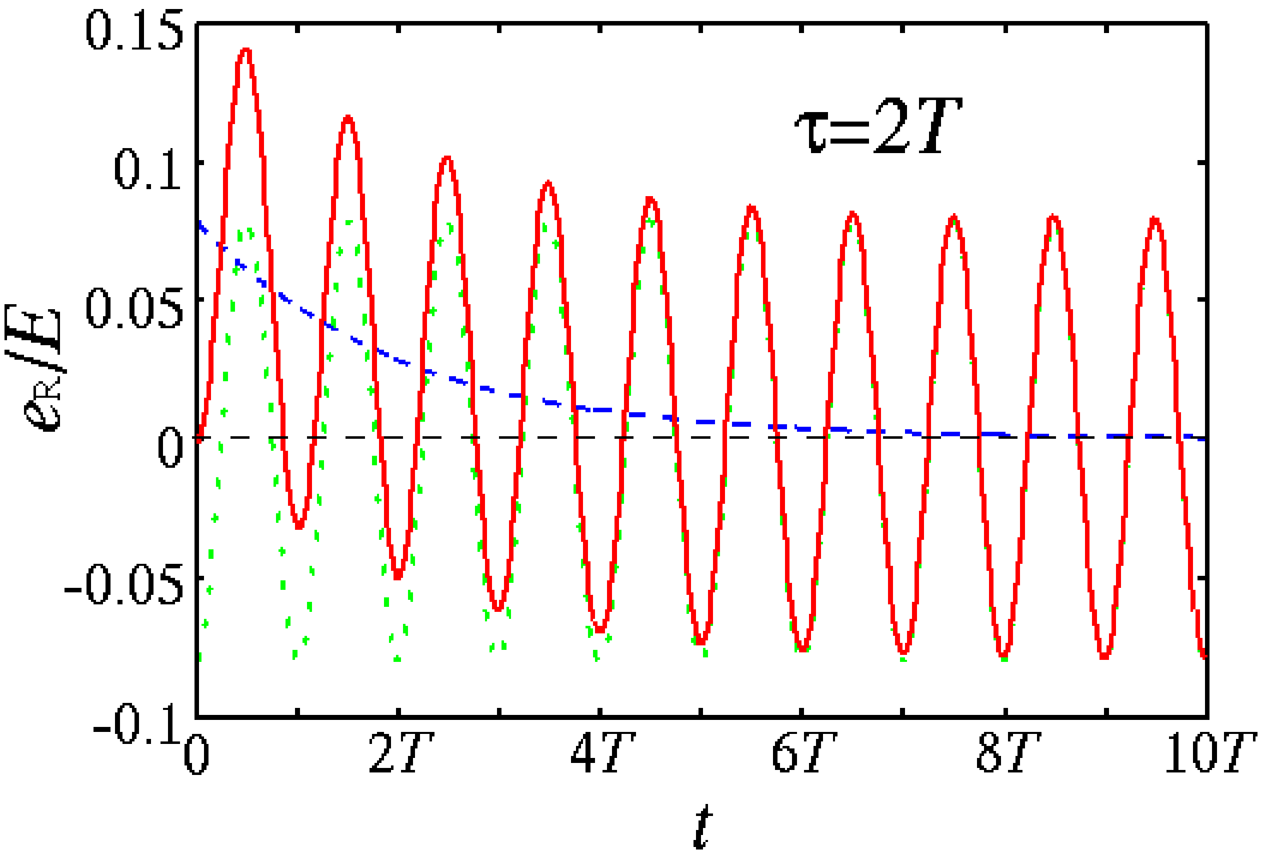
$$L\frac{di}{dt} + Ri = E\sin(\omega_s t)$$ から

$$i = [i_\infty(t) - \{I_0 + i_\infty(0)\}\exp(-t/\tau)]u(t) + I_0$$

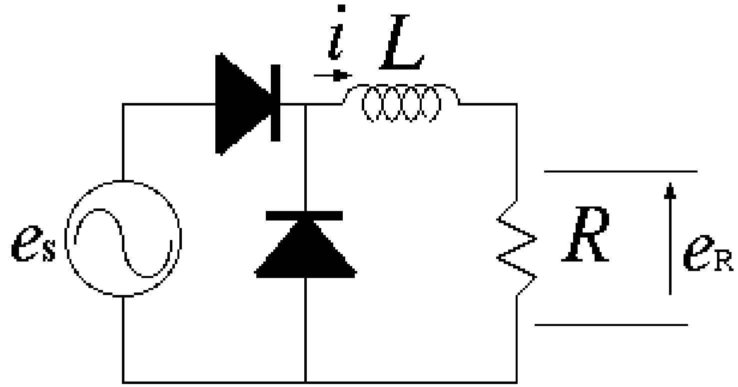
ここで

$$i_\infty(t) = \Im\left[\frac{E\exp(j\omega_s t)}{j\omega_s L + R}\right] = \frac{E}{R}\cos\theta\sin(\omega_s t - \theta)$$

過渡応答波形



$$e_{\mathrm{R}} = Ri = E\cos\theta[\sin(\omega_{\mathrm{s}}t-\theta)+\sin\theta\exp(-t/\tau)]u(t)$$



$\omega_s T = 2\pi$

$\tau = L/R$

$\theta = \tan^{-1}(\omega_s \tau)$

$e_s = E\sin(\omega_s t)$

整流回路（交流から直流を発生） その1

$$e_R = \begin{cases} E\cos\theta\sin(\omega_s t - \theta) + c_1 \exp\{-(t-nT)/\tau\} & nT < t < (n+1/2)T \\ c_2 \exp\{-(t-nT)/\tau\} & (n|1/2)T < t < (n+1)T \end{cases}$$

$t = nT$、$t = (n+1/2)T$でe_Rが連続であるから、

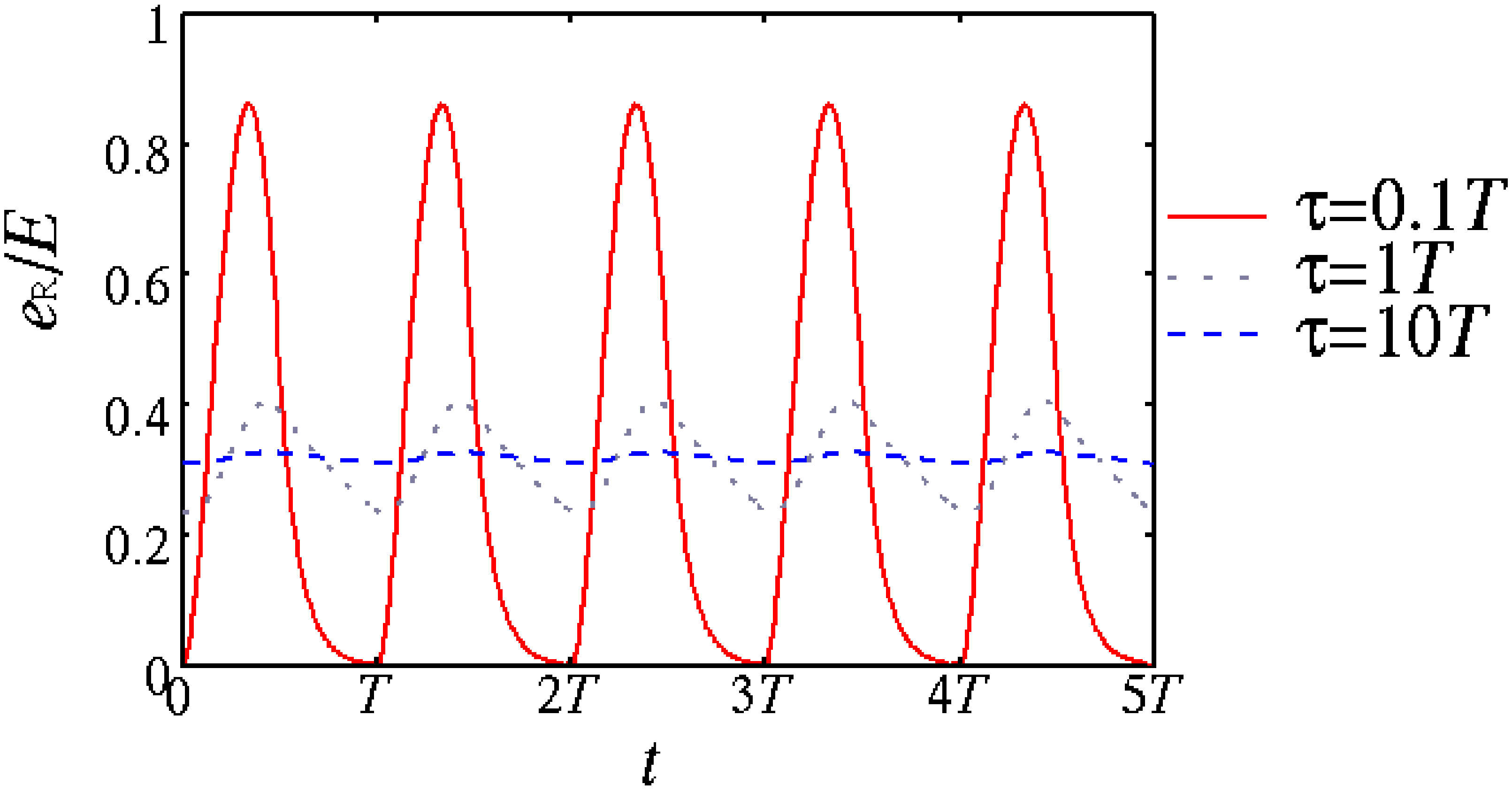
$$E\sin 2\theta/2 + c_1 \exp(-T/2\tau) = c_2 \exp(-T/2\tau)$$

$$-E\sin 2\theta/2 + c_1 = c_2 \exp(-T/\tau)$$

$$\Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{E\sin 2\theta/2}{1-\exp(-T/2\tau)}$$

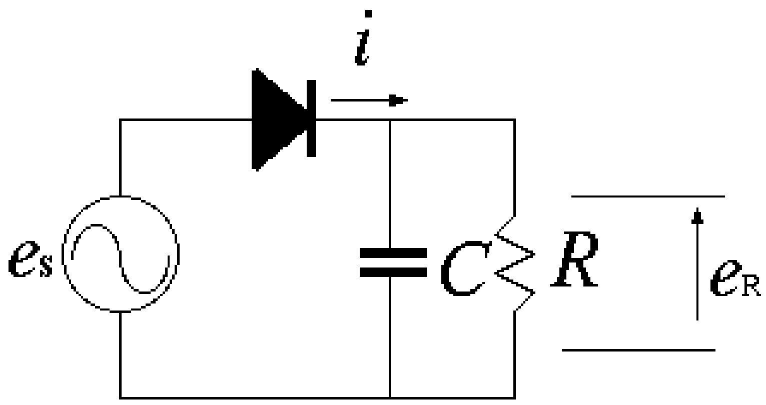
$$c_2 = c_1 \exp(T/2\tau)$$



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
e_R/E
0
T
2T
3T
4T
5T
t
τ=0.1T
τ=1T
τ=10T

$$e_{\mathrm{DC}} = \frac{1}{\pi} E \cos^2\theta + \frac{\tau}{T} E \sin 2\theta = \frac{1}{\pi} E$$

$$e_{\mathrm{RMS}} = E\sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\theta + \frac{\sin^3\theta\cos\theta}{2\pi}\frac{1+\exp(-T/2\tau)}{1-\exp(-T/2\tau)}}$$



$\omega T=2\pi$

$\tau=CR$

$e_s=E\sin(\omega_s t)$

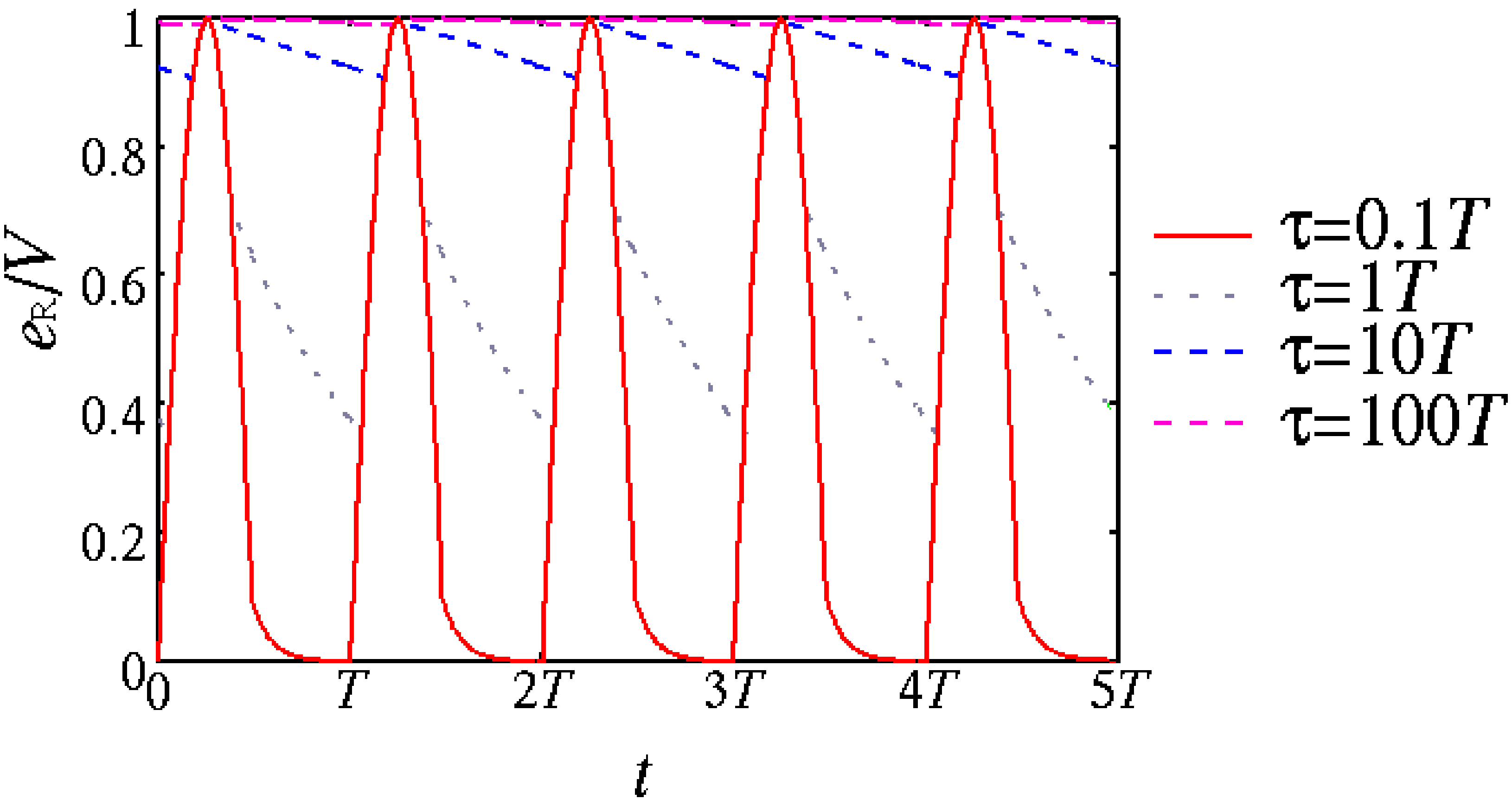
整流回路（交流から直流を発生）　その２

$$e_R=\begin{cases} E\sin(\omega_s t) & t_1+nT<t<t_2+nT \\ E\sin(\omega_s t_2)\exp\{-(t-nT-t_2)/\tau\} & t_2+nT<t<t_1+(n+1)T \end{cases}$$

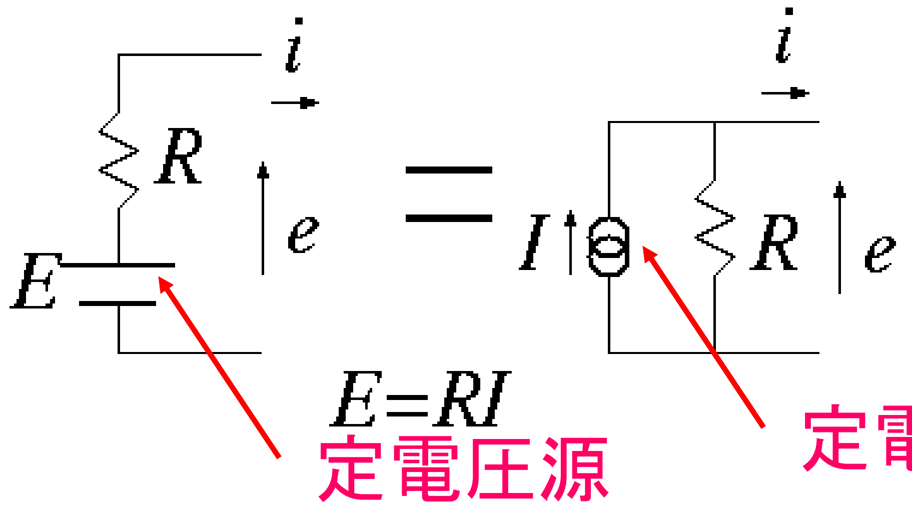
$t=t_2$でe_Rとde_R/dtが連続、$t=t_1$でe_Rが連続であるから

$$\omega_s t_2=\pi-\tan^{-1}(\omega_s\tau)$$

$$\sin(\omega_s t_1)=\sin(\omega_s t_2)\exp\{-(T+t_1-t_2)/\tau\}$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
e_R/V
0
T
2T
3T
4T
5T
t
τ=0.1T
τ=1T
τ=10T
τ=100T

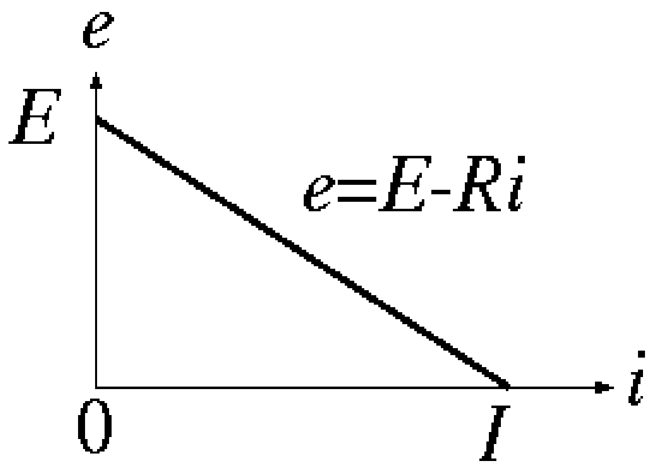
テブナンの定理



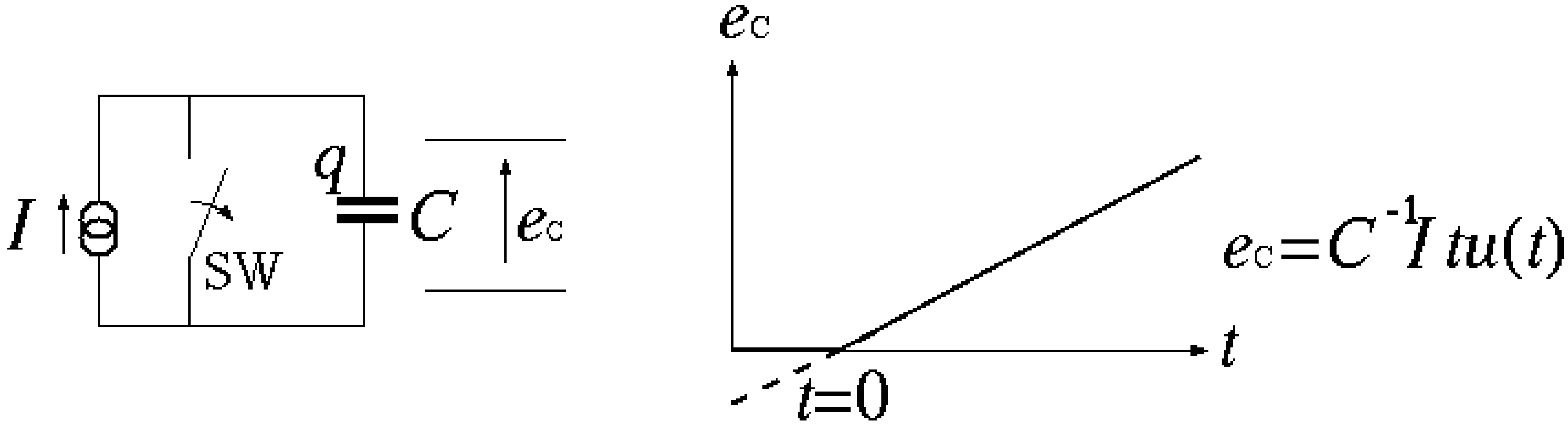
E: 開放電圧

I: 短絡電流$(=E/R)$

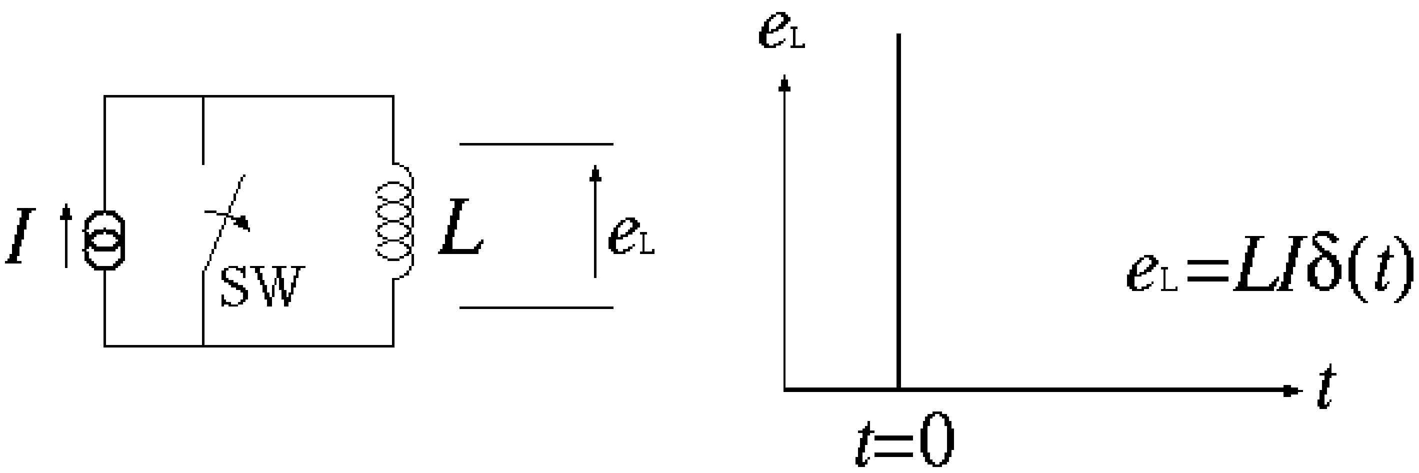
R: 内部抵抗



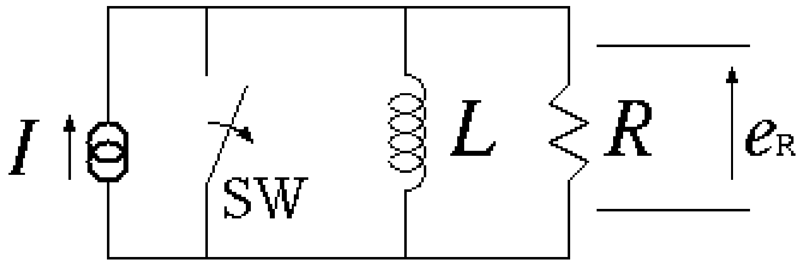
定電流源をキャパシタに接続すると



定電流源をインダクタに接続すると



t=0でSW off

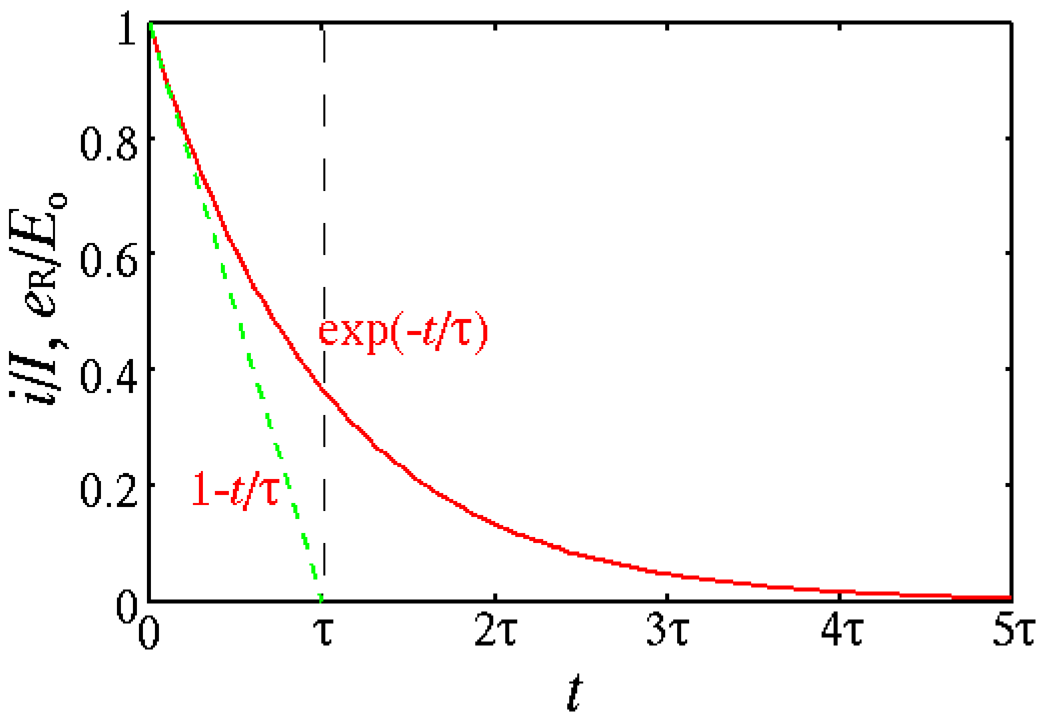


$$\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} e_{\mathrm{R}}\,dt + \frac{1}{R}e_{\mathrm{R}} = I$$ であるから

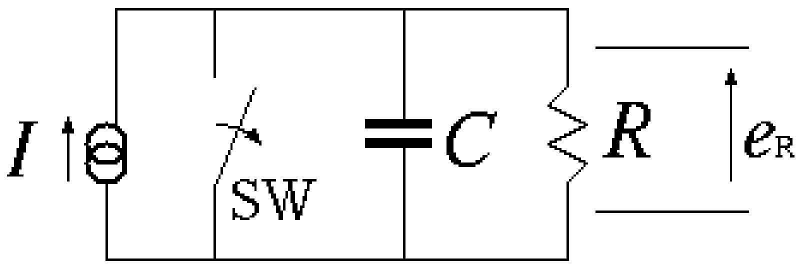
$$e_{\mathrm{R}}(t) = R(I - I_0)\exp(-Rt/L)$$

I_0 : t=0$^-$でLを流れる電流

$\tau = L/R$: 時定数



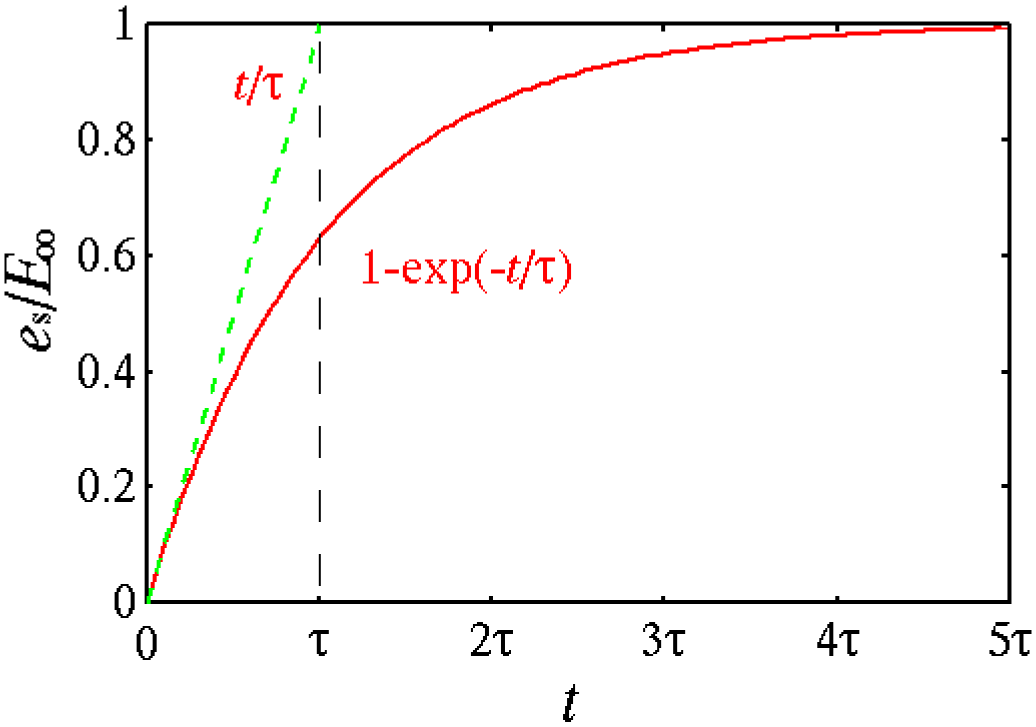
t=0でSW off

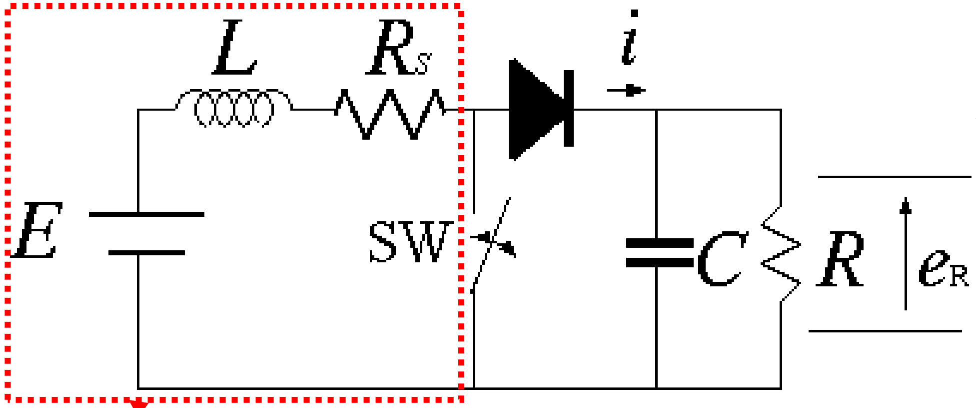


$E_\infty = IR$: $t \Rightarrow \infty$での電圧

$\tau = CR$: 時定数

$$C\frac{de_{\mathrm{R}}}{dt}+\frac{1}{R}e_{\mathrm{R}}=I$$ であるから $$e_{\mathrm{R}}=E_\infty\{1-\exp(-t/\tau)\}$$





$T<t<nT+w$の間SW off

$\tau=CR$:時定数

$L/(R_s+R)>>T$の時、$I=E/R_s$の定電流源と近似可能

$nT<t<nT+w$では　$C\dfrac{de}{dt}+\dfrac{1}{R}e=I$

$$e = IR + (E_0 - IR)\exp\{-(t-nT)/\tau\}$$

$nT+w<t<(n+1)T$では　$C\dfrac{de}{dt}+\dfrac{1}{R}e=0$

$$e = [IR + (E_0 - IR)\exp(-w/\tau)]\exp\{-(t-nT-w)/\tau\}$$

$t=nT$で連続から　$E_0 = IR\dfrac{\exp(w/\tau)-1}{\exp(T/\tau)-1} = E\dfrac{R}{R_s}\dfrac{\exp(w/\tau)-1}{\exp(T/\tau)-1}$

$nT<t<nT+w$では

$$e = E\frac{R}{R_{\mathrm{s}}}\left[1+\frac{\exp(w/\tau)-\exp(T/\tau)}{\exp(T/\tau)-1}\exp\{-(t-nT)/\tau\}\right]$$

$nT+w<t<(n+1)T$では

$$e = E\frac{R}{R_{\mathrm{s}}}\frac{1-\exp(-w/\tau)}{1-\exp(-T/\tau)}\exp\{-(t-nT-w)/\tau\}$$

$t=nT$で連続から $E_0 = E\dfrac{R}{R_{\mathrm{s}}}\dfrac{\exp(w/\tau)-1}{\exp(T/\tau)-1}$

線形1階微分方程式を解く（その6）

$$\frac{dx}{dt} + f(t)x = g(t)$$

$$\Downarrow$$

$$x = x_0(t)X(t)$$ と表現

$$x_0(t) = \exp\left(-\int f(t)dt\right)$$ $g(t)=0$の時の解

$$\Downarrow$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = g(t)\exp\left(\int f(t)dt\right)$$

$$\Downarrow$$

$$X(t) = \int\left\{g(t)\exp\left(\int f(t)dt\right)\right\}dt + c$$

線形2階微分方程式を解く（その１）

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0$$

$$\left(d/dt-s_1\right)\left(d/dt-s_2\right)x=0$$ と変形

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

$\left(d/dt-s_1\right)x=0$ もしくは $\left(d/dt-s_2\right)x=0$ の条件から

両式の一般解の線形和

$x=c_1\exp(s_1t)+c_2\exp(s_2t)$　$s_1 \neq s_2$ の時　c_1, c_2：積分定数

$s_1=s_2$ の時　$dx/dt-s_1x=c\exp(s_1t)$ の解は

$$x=(c_0+c_1t)\exp(s_1t)$$

線形2階微分方程式を解く(その1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(t)$$

両辺を積分

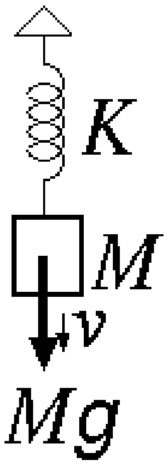
$$\frac{dx}{dt} = \int g(t)dt + c_1$$

両辺を積分

$$x = \int \left[\int g(t)dt + c_1 \right] dt + c_2 = \int\int g(t)dtdt + c_1 t + c_2$$

c_1, c_2:積分定数

t=0で力印加



$Mg = M dv/dt + Kx$

$v = dx/dt$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{M}x = g$$ から、一般解は

$$x = \omega^{-1}V_0 \sin(\omega t) + (X_0 - X_\infty)\cos(\omega t) + X_\infty$$

$$v = V_0 \cos(\omega t) - \omega(X_0 - X_\infty)\sin(\omega t)$$

X_0: t=0でののび

$X_\infty = gM/K$: $t=\infty$でののび

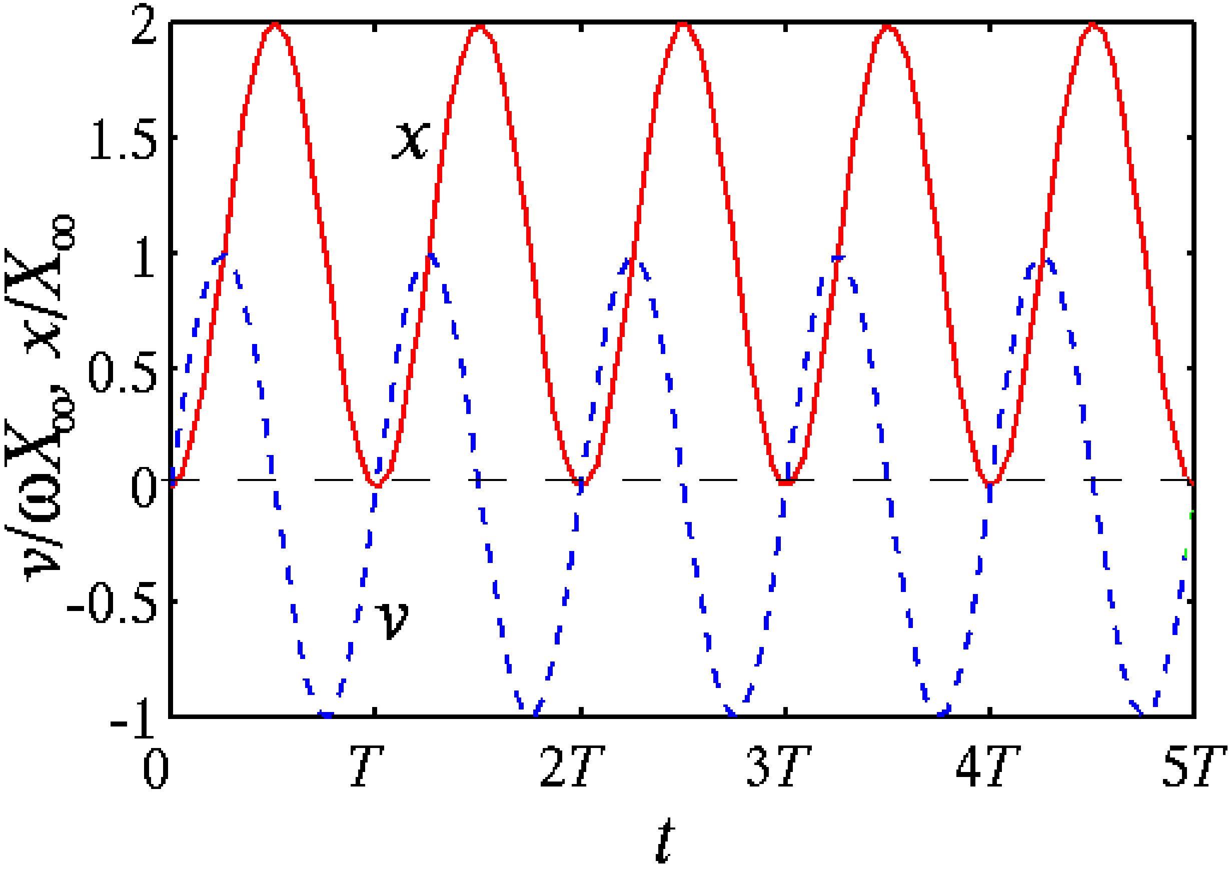
V_0: t=0での速度

$\omega = (K/M)^{0.5}$: 振動角周波数

X_0=0, V_0=0の時

$$x = X_\infty\{1-\cos(\omega_s t)\}$$

$$v = \omega_s X_\infty \sin(\omega_s t)$$



エネルギーのやり取りは？

$$M\frac{dv}{dt}+Kx=Mg$$ の両辺にvを乗じると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}K\left(x-X_\infty\right)^2\right)=0$$

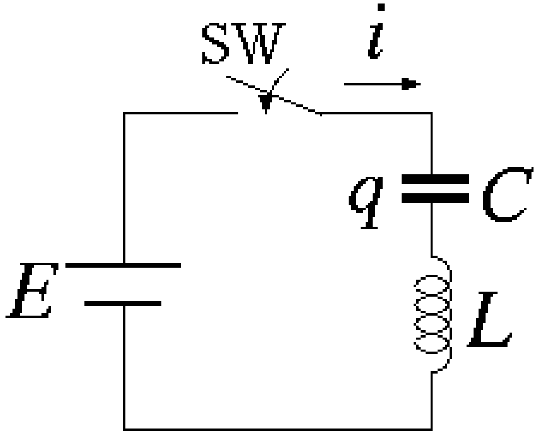
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}K\left(x-X_\infty\right)^2=C$$

$\frac{1}{2}Mv^2$ ： 運動エネルギー　　C: 定数

$\frac{1}{2}K\left(x-X_\infty\right)^2$ ： 平衡点を基準とした弾性エネルギー

全体のエネルギーは時間不変で一定値C

t=0でSW on



Q_0: t=0での電荷

Q_∞=CE: t=∞での電荷

I_0: t=0での電流(この場合零)

ω=$(CL)^{-0.5}$: 共振角周波数

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C}q=E$$ から、一般解は

$$q=(Q_0-Q_\infty)\cos(\omega t)+Q_\infty$$

$$i=\frac{dq}{dt}=-\omega(Q_0-Q_\infty)\sin(\omega t)$$

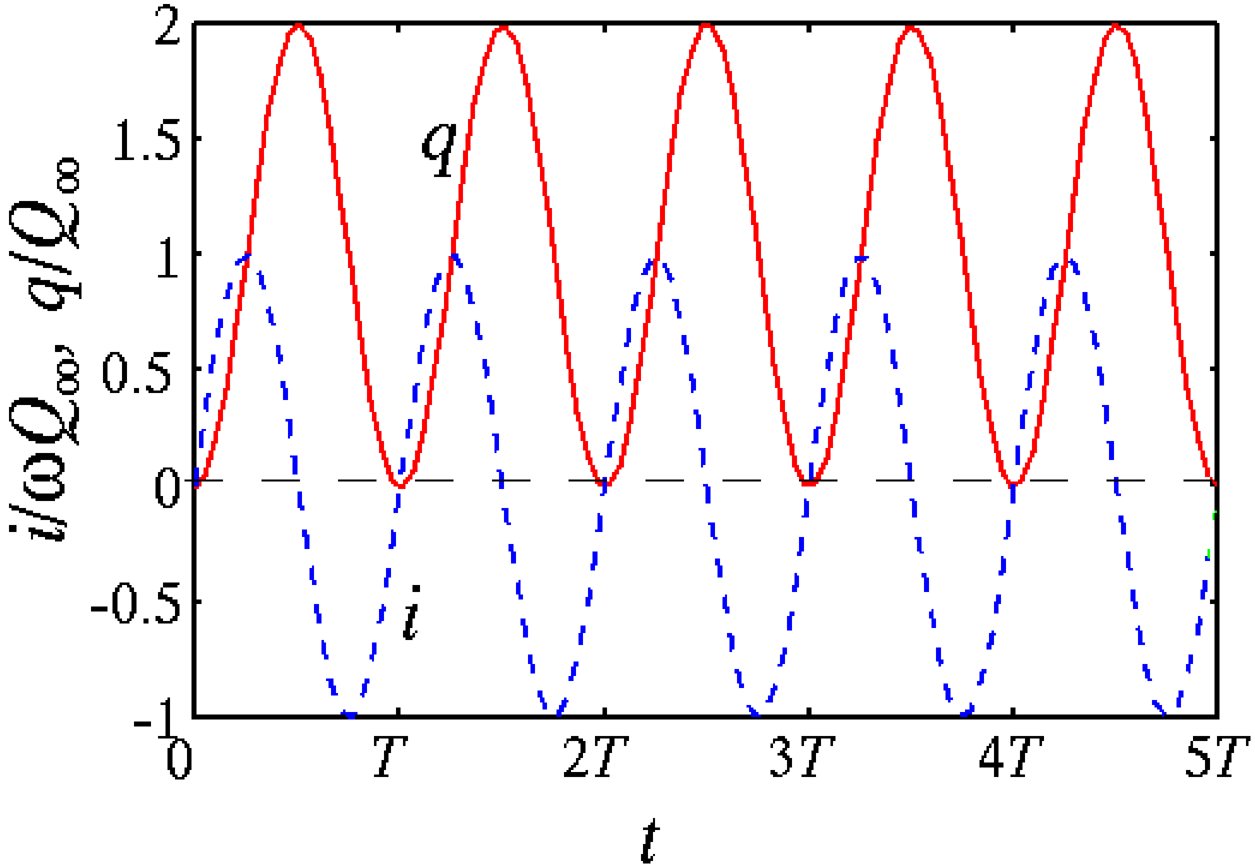
Q_0=0の時

$$q = Q_\infty[1-\cos(\omega t)]$$

$$i = \omega Q_\infty \sin(\omega t)$$

$Q_\infty=CE$: $t=\infty$での電荷

$\omega=(CL)^{-0.5}$: 振動角周波数



エネルギーのやり取りは？

$$L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}q=E$$ の両辺にiを乗じると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2C}(q-Q_\infty)^2\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2C}(q-Q_\infty)^2=C$$

$\frac{1}{2}Li^2$ ： Lへの蓄積エネルギー　　C: 定数

$\frac{1}{2C}\left(q-Q_\infty\right)^2$ ： 平衡点を基準としたCへの蓄積エネルギー

全体のエネルギーは時間不変で一定値C

線形2階微分方程式を解く（その2）

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0$$

$$\left(d/dt-s_1\right)\left(d/dt-s_2\right)x=0$$ と変形

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

$\left(d/dt-s_1\right)x=0$ もしくは $\left(d/dt-s_2\right)x=0$ の条件から

両式の一般解の線形和

$s_1 \neq s_2$の時　c_1, c_2:積分定数

$$x=c_1\exp(s_1t)+c_2\exp(s_2t)$$

重根の時 $a^2 = 4b$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(d/dt + a/2\right)^2 x = 0$$ と変形

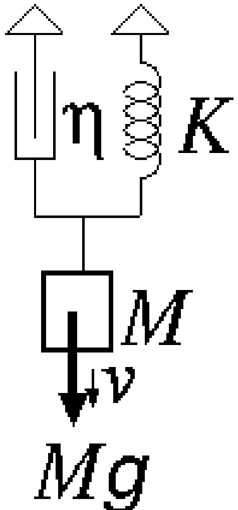
$$dx/dt + (a/2)x = c_1 \exp(-at/2)$$

$x = f(t)\exp(-at/2)$ とおけば $df/dt = c_1$

ゆえに $f(t) = c_0 + c_1 t$

$$\Downarrow$$

$$x = (c_0 + c_1 t)\exp(-at/2)$$



$t=0$で力印加

$$Mg = M\,dv/dt + \eta v + Kx$$

$$v = dx/dt$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + \eta\frac{dx}{dt} + Kx = Mg$$ から、一般解は

$$x = c_1\exp(s_1 t) + c_2\exp(s_2 t) + X_\infty$$

$$v = s_1 c_1\exp(s_1 t) + s_2 c_2\exp(s_2 t)$$

$s_1 \neq s_2$の時

$X_\infty = Mg/K$: $t=\infty$でののび

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4KM}}{2M}$$

$$X_0 = c_1 + c_2 + X_\infty$$
$$V_0 = s_1 c_1 + s_2 c_2$$

$$\Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{V_0 - s_2(X_0 - X_\infty)}{s_1 - s_2}$$

$$c_2 = \frac{V_0 - s_1(X_0 - X_\infty)}{s_2 - s_1}$$

$\eta > 2\sqrt{KM}$ の時、s_1, s_2は実数⇒単調減少(過制動)

$$x = c_1 \exp(s_1 t) + c_2 \exp(s_2 t) + X_\infty$$

$$v = s_1 c_1 \exp(s_1 t) + s_2 c_2 \exp(s_2 t)$$

急速に減衰する関数と緩やかに減衰する関数の和

$\eta = 2\sqrt{KM}$ の時(重根)、単調減少（臨界制動）

$$x = (X_0 - X_\infty + V_0 t)\exp(s_1 t) + X_\infty$$

$$v = \{V_0 + s_1(X_0 - X_\infty + V_0 t)\}\exp(s_1 t)$$

$$s_1 = -\frac{\eta}{2M}$$

$\eta < 2\sqrt{KM}$ の時、振動解（不足制動）

$$x = c_1 \exp(s_1 t) + c_2 \exp(s_2 t) + X_\infty$$
$$v = s_1 c_1 \exp(s_1 t) + s_2 c_2 \exp(s_2 t)$$

$s_2 = s_1^*$、$c_2 = c_1^*$であるから

$$x = 2\Re\left[c_1 \exp(s_1 t)\right] + X_\infty$$
$$v = 2\Re\left[s_1 c_1 \exp(s_1 t)\right]$$

$s_1 = -\alpha + j\omega$ と表現すれば

$$c_1 = \frac{X_0 - X_\infty}{2} - j\frac{V_0 + \alpha(X_0 - X_\infty)}{2\omega}$$
$$s_1 c_1 = \frac{V_0}{2} + j\frac{\alpha V_0 + (\alpha^2 + \omega^2)(X_0 - X_\infty)}{2\omega}$$

$$x=\left[(X_0-X_\infty)\cos(\omega t)+\frac{V_0+\alpha(X_0-X_\infty)}{\omega}\sin(\omega t)\right]\exp(-\alpha t)+X_\infty$$

$$=\sqrt{(X_0-X_\infty)^2+\left\{\frac{V_0+\alpha(X_0-X_\infty)}{\omega}\right\}^2}\cos(\omega t+\theta_x)\exp(-\alpha t)+X_\infty$$

$$v=\left[V_0\cos(\omega t)-\frac{\alpha V_0+(\alpha^2+\omega^2)(X_0-X_\infty)}{\omega}\sin(\omega t)\right]\exp(-\alpha t)$$

$$=\sqrt{V_0{}^2+\left\{\frac{\alpha V_0+(\alpha^2+\omega^2)(X_0-X_\infty)}{\omega}\right\}^2}\cos(\omega t+\theta_v)\exp(-\alpha t)$$

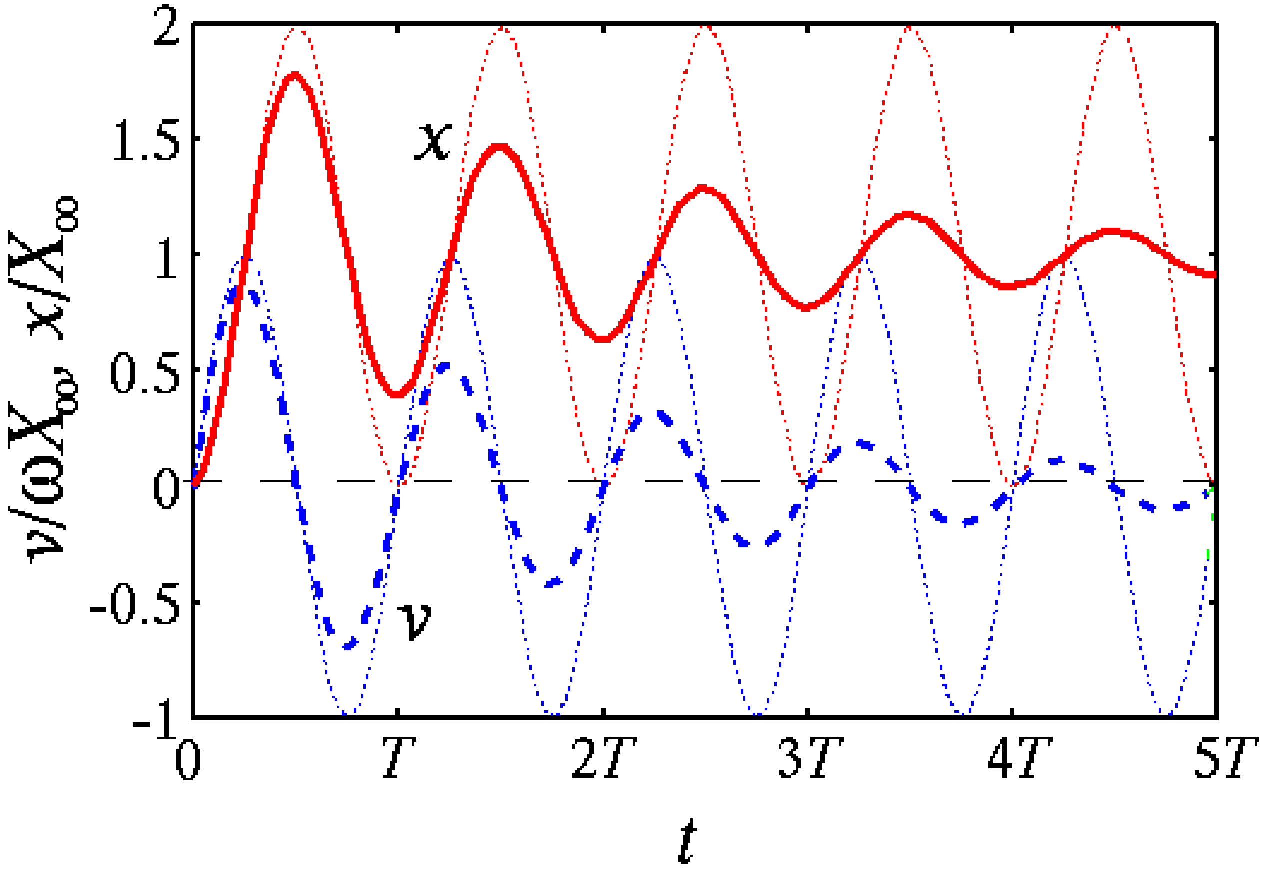
ここで $\theta_x=-\tan^{-1}\left[\frac{V_0+\alpha(X_0-X_\infty)}{\omega(X_0-X_\infty)}\right]$

$$\theta_v=\tan^{-1}\left[\frac{\alpha V_0+(\alpha^2+\omega^2)(X_0-X_\infty)}{\omega V_0}\right]$$

V_0=0、X_0=0の時

$$x = -X_\infty \left[\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right] \exp(-\alpha t) + X_\infty$$

$$v = X_\infty \left[\frac{(\alpha^2 + \omega^2)}{\omega} \sin(\omega t) \right] \exp(-\alpha t)$$



エネルギーのやり取りは？

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+\eta\frac{dx}{dt}+Kx=Mg$$ の両辺にvを乗じると

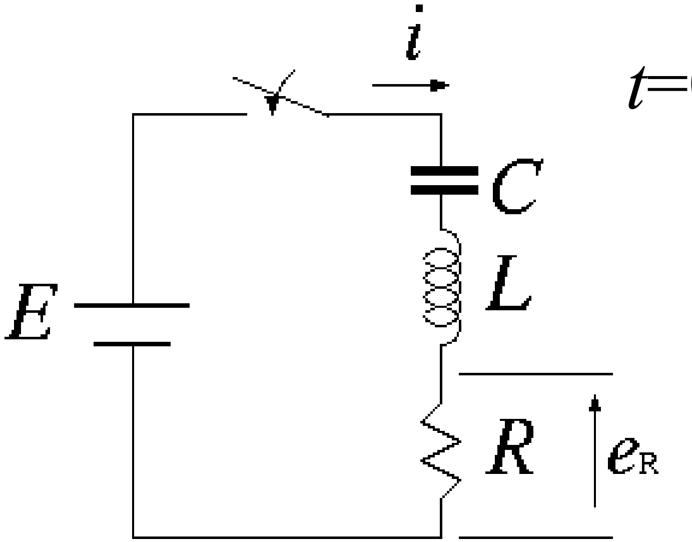
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}K\left(x-X_\infty\right)^2\right)=-\eta v^2$$

$\frac{1}{2}Mv^2$ ： 運動エネルギー

$\frac{1}{2}K\left(x-X_\infty\right)^2$ ： 平衡点を基準とした弾性エネルギー

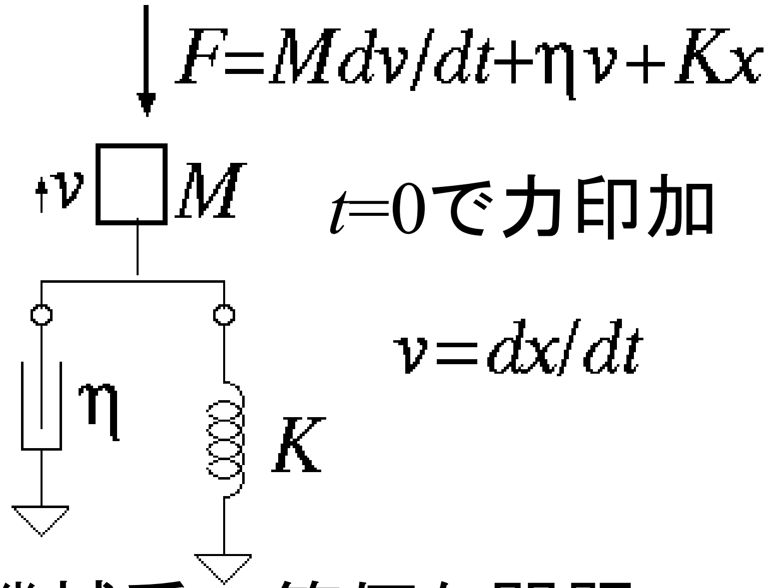
ηv^2 ： ηによる消費パワー

全体のエネルギーの時間当たりの減少分は、
ηにおける消費パワーと等しい



t=0でSW on

⇔



t=0で力印加

$v=dx/dt$

機械系の等価な問題

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E$$ から、一般解は

$$q=c_1\exp(s_1t)+c_2\exp(s_2t)+Q_\infty$$

$$i=s_1c_1\exp(s_1t)+s_2c_2\exp(s_2t)$$

$Q_\infty=CE$: $t=\infty$での電荷

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}$$

$$Q_0 = c_1 + c_2 + Q_\infty$$
$$I_0 = s_1 c_1 + s_2 c_2$$

$$\Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{I_0 - s_2(Q_0 - Q_\infty)}{s_1 - s_2}$$
$$c_2 = \frac{I_0 - s_1(Q_0 - Q_\infty)}{s_2 - s_1}$$

I_0=0、Q_0=0の時

$$c_1 = \frac{s_2 Q_\infty}{s_1 - s_2}$$
$$c_2 = \frac{s_1 Q_\infty}{s_2 - s_1}$$

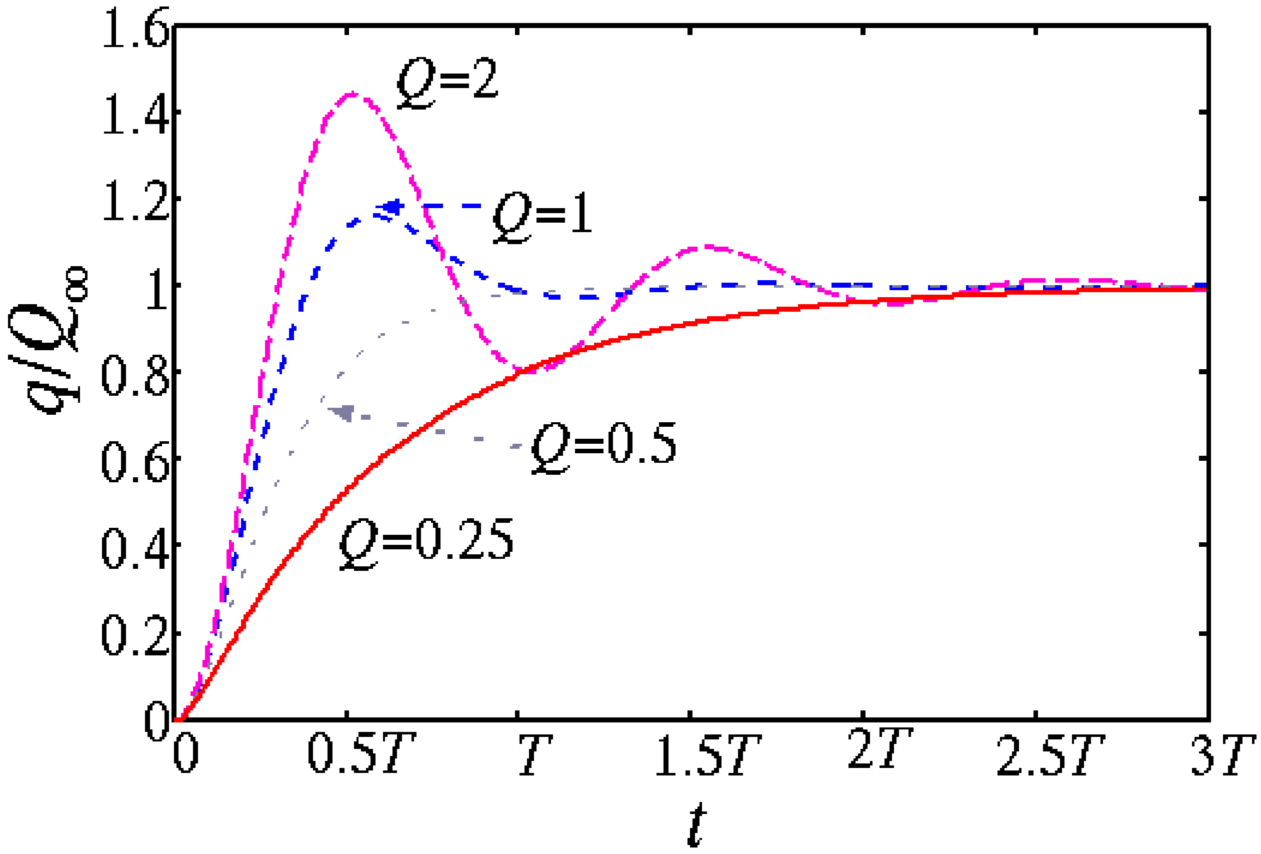
$$q = \frac{Q_\infty}{s_1 - s_2}\left[s_1\{1 - \exp(s_2 t)\} - s_2\{1 - \exp(s_1 t)\}\right]$$

$$i = \frac{s_1 s_2 Q_\infty}{s_1 - s_2}\left[\exp(s_1 t) - \exp(s_2 t)\right]$$

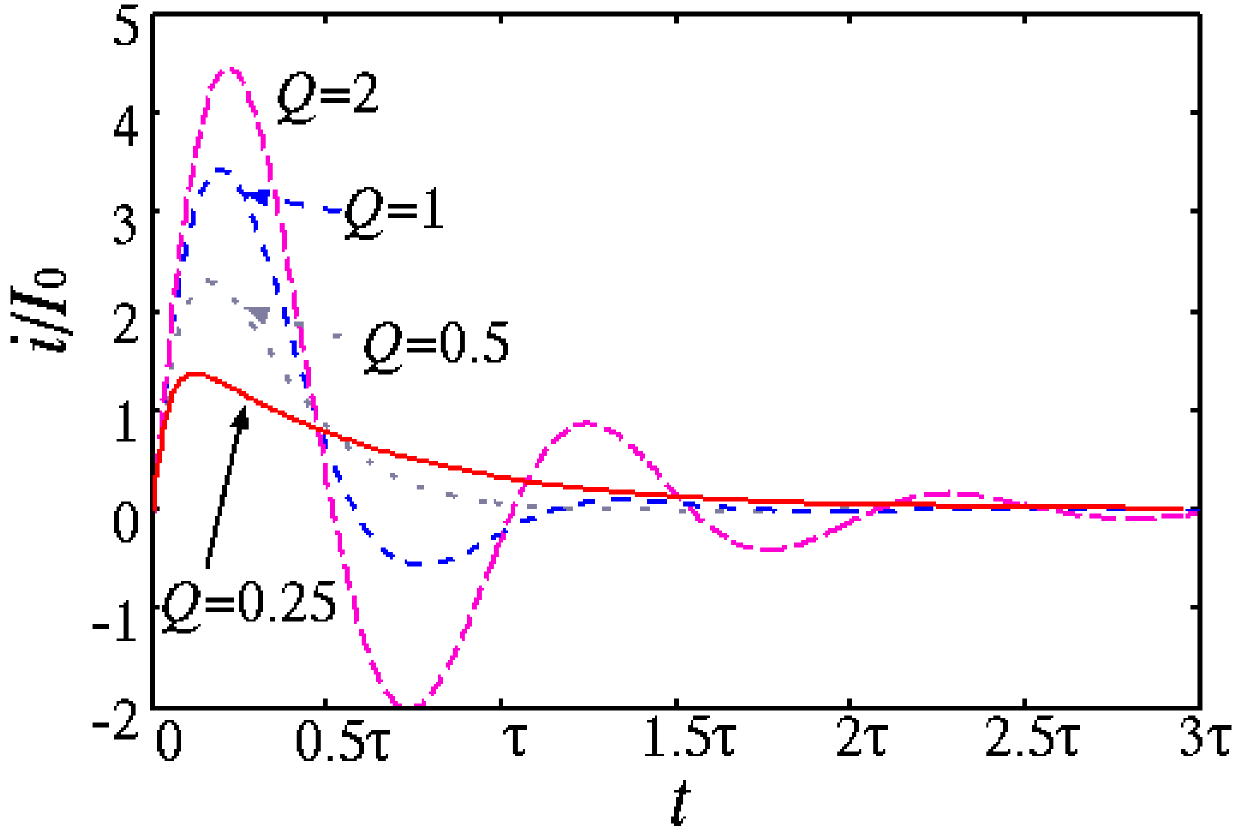
$\omega = 1/\sqrt{LC}$

$Q = R^{-1}\sqrt{L/C}$ と表現すると

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \omega \frac{-Q^{-1} \pm \sqrt{Q^{-2} - 4}}{2}$$



過渡応答波形



エネルギーのやり取りは？

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E$$ の両辺にiを乗じると

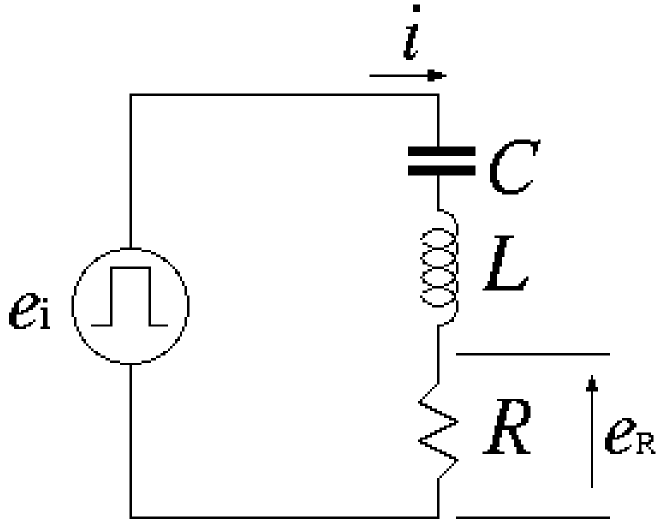
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2C}\left(q-Q_\infty\right)^2\right)=-Ri^2$$

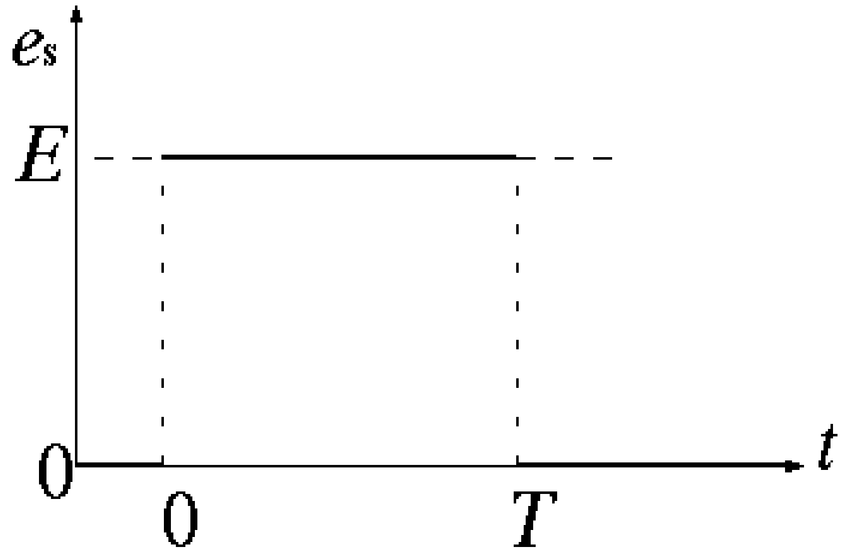
$\frac{1}{2}Li^2$ ： Lへの蓄積エネルギー　　　C:　定数

$\frac{1}{2C}\left(q-Q_\infty\right)^2$ ： 平衡点を基準としたCへの蓄積エネルギー

Ri^2 ： Rによる消費パワー

全体のエネルギーの時間当たりの減少分は、
Rにおける消費パワーと等しい





$0<t<T$では $L\dfrac{d^2q}{dt^2}+R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{1}{C}q=E$　　$t=0$で$q=0$から

$$\Rightarrow \quad q=\frac{Q_\infty}{s_1-s_2}\left[s_1\{1-\exp(s_2t)\}-s_2\{1-\exp(s_1t)\}\right]$$

$$i=\frac{s_1s_2Q_\infty}{s_1-s_2}\left[\exp(s_1t)-\exp(s_2t)\right]$$

$t>T$では $L\dfrac{d^2q}{dt^2}+R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{1}{C}q=0$ $t=T$でqが連続から

⇨ $$q=c_1\exp\{s_1(t-T)\}+c_2\exp\{s_2(t-T)\}$$

$$i=s_1c_1\exp\{s_1(t-T)\}+s_2c_2\exp\{s_2(t-T)\}$$

ここで

$$c_1=\frac{i\big|_{t=T}-s_2(q\big|_{t=T}-Q_\infty)}{s_1-s_2}=Q_\infty\frac{s_2\exp(s_1T)}{s_1-s_2}$$

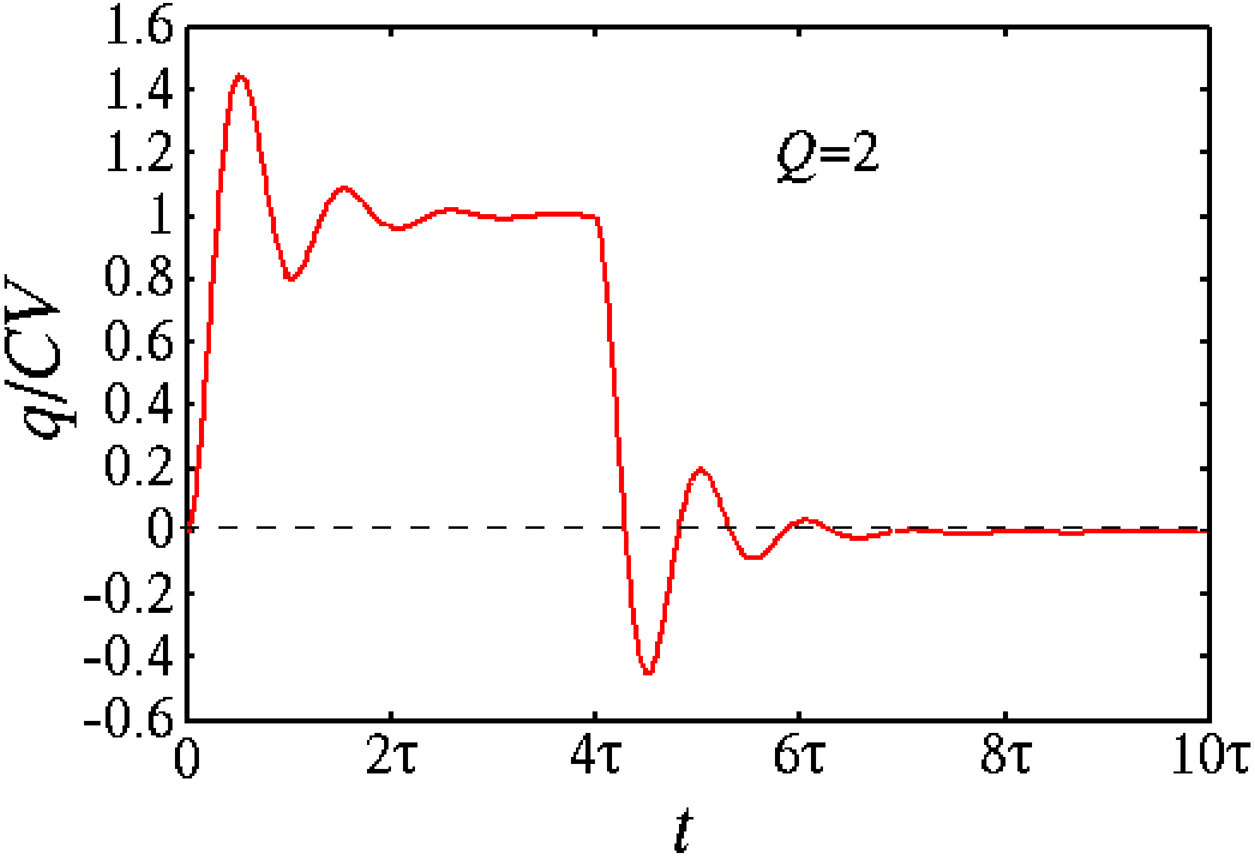
$$c_2=\frac{i\big|_{t=T}-s_1(q\big|_{t=T}-Q_\infty)}{s_2-s_1}=-Q_\infty\frac{s_1\exp(s_2T)}{s_1-s_2}$$

⇨ $$q=Q_\infty\frac{s_2\exp(s_1t)-s_1\exp(s_2t)}{s_1-s_2}$$

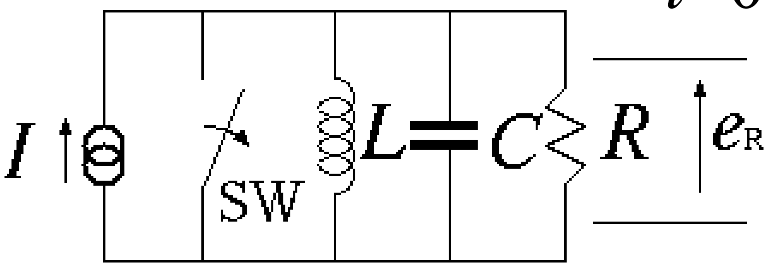
$$i=\frac{s_1s_2Q_\infty}{s_1-s_2}\{\exp(s_1t)-\exp(s_2t)\}$$

$0<t<T$では $q = \frac{Q_\infty}{s_1 - s_2}\left[s_1\{1-\exp(s_2 t)\} - s_2\{1-\exp(s_1 t)\}\right]$

$t>T$では $q = \frac{Q_\infty}{s_1 - s_2}\left[s_2 \exp(s_1 t) - s_1 \exp(s_2 t)\right]$



t=0でSW off

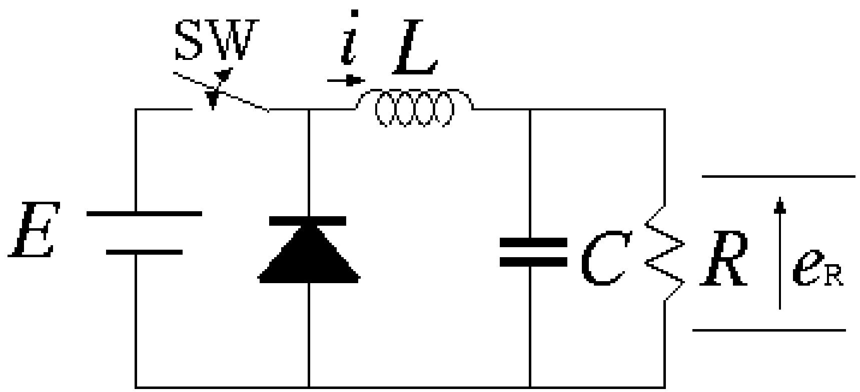


$$\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} e_R dt + \frac{1}{R} e_R + C\frac{de_R}{dt} = I$$ であるから

$$\frac{1}{s}[E_R(s)/L + i(0)] + \frac{1}{R}E_R(s) + [sCE_R(s) - Q_0] = I/s$$

$$E_R(s) = \frac{Q_0 - i(0)/s + I/s}{sC + 1/R + 1/sL}$$

$$e_R(t) = R(I - I_0)\exp(-Rt/L)$$



$nT<t<nT+w$の間SW on

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \frac{-R^{-1} \pm \sqrt{R^{-2} - 4C/L}}{2C}$$

$nT<t<nT+w$では

$$E = L\frac{di}{dt} + \frac{q_c}{C}$$

$$R\left\{i - \frac{dq_c}{dt}\right\} = \frac{q_c}{C}$$

$$\Rightarrow \quad V = L\frac{d^2 q_c}{dt^2} + \frac{L}{CR}\frac{dq_c}{dt} + \frac{q_c}{C}$$

この解は

$$q_c = CE + c_1 \exp\{s_1(t-nT)\} + c_2 \exp\{s_2(t-nT)\}$$

$$i = \frac{q_c}{CR} + \frac{dq_c}{dt} = \frac{E}{R} - c_1 s_2 \exp\{s_1(t-nT)\} - c_2 s_1 \exp\{s_2(t-nT)\}$$

線形2階微分方程式を解く（その３）

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = V\sin(\omega t)$$

$$\Downarrow$$

$$x = x_\infty(t) + x_t$$ と表現

$$x_\infty(t) = \Im[V\exp(j\omega t)/(-\omega^2 + j\omega + a)]$$

t=∞での解（定常解）

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2x_t}{dt^2} + a\frac{dx_t}{dt} + bx_t = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_t = c_1\exp(s_1 t) + c_2\exp(s_2 t)$$ $s_1 \neq s_2$の時

$$x_t = (c_0 + c_1 t)\exp(s_1 t)$$ $s_1 = s_2$の時