令和2年9月25日版

回路理論II

２．ラプラス変換

千葉大学工学部
総合工学科電気電子工学コース
橋本研也
k.hashimoto@ieee.org
http://www.te.chiba-u.jp/lab/ken

ラプラス変換

$t \geq 0$で定義された関数$e(t)$に対して

$$E(s) = \mathcal{L}[e(t)] = \int_0^\infty e(t)\exp(-st)dt$$

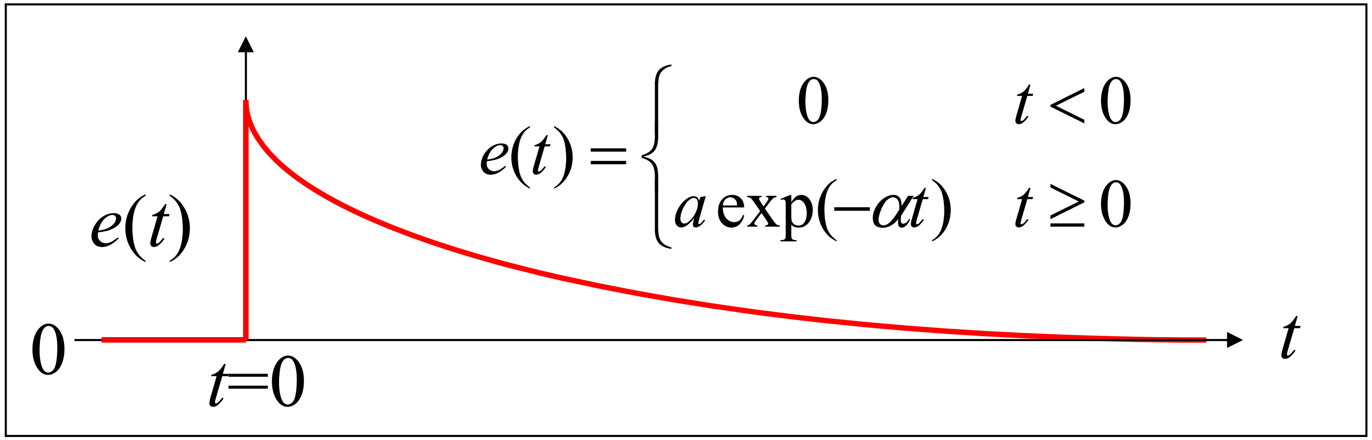
によりラプラス変換$E(s)$を定義すると、

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1}[E(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} E(s)\exp(+st)ds$$

が成立し、これをラプラス逆変換と言う。α: 定数

線形性

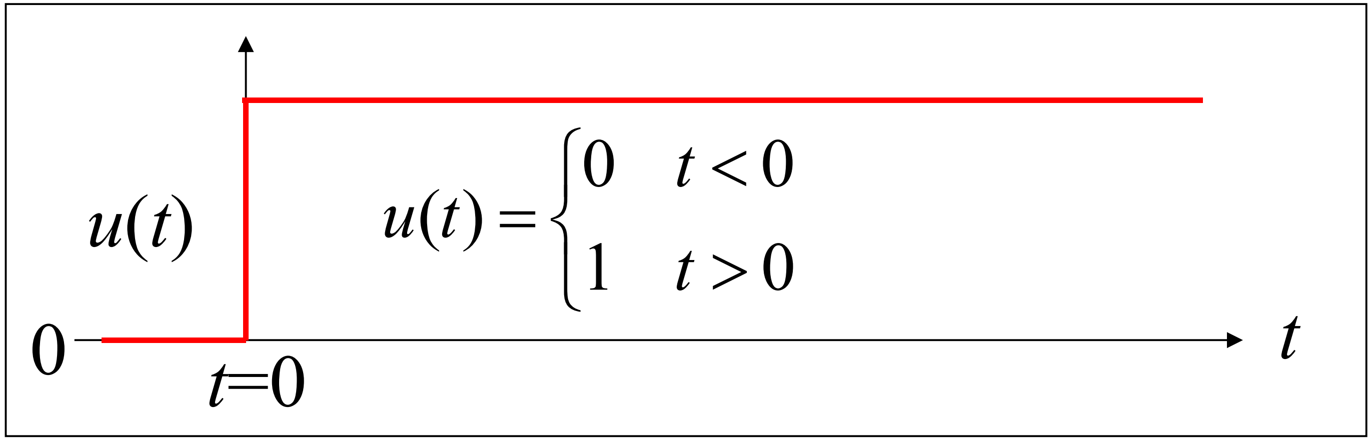
$$\mathcal{L}[a_1 e_1(t) + a_2 e_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[e_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[e_2(t)]$$

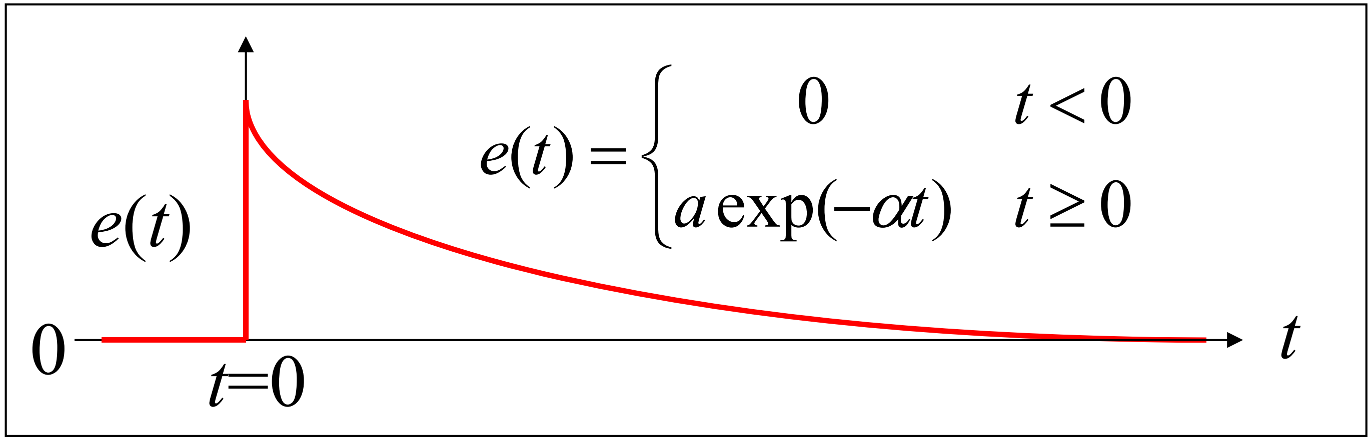


$$\mathcal{L}\left[e(t)\right] = \int_0^{+\infty} a\exp\{-(s+\alpha)t\}dt$$

$$= \left[-\frac{a\exp\{-(s+\alpha)t\}}{s+\alpha}\right]_0^{\infty} = \frac{a}{s+\alpha}$$

$a \to 1, \alpha \to 0$の時　→　ステップ関数 $u(t) \Rightarrow \mathcal{L}[u(t)] = s^{-1}$

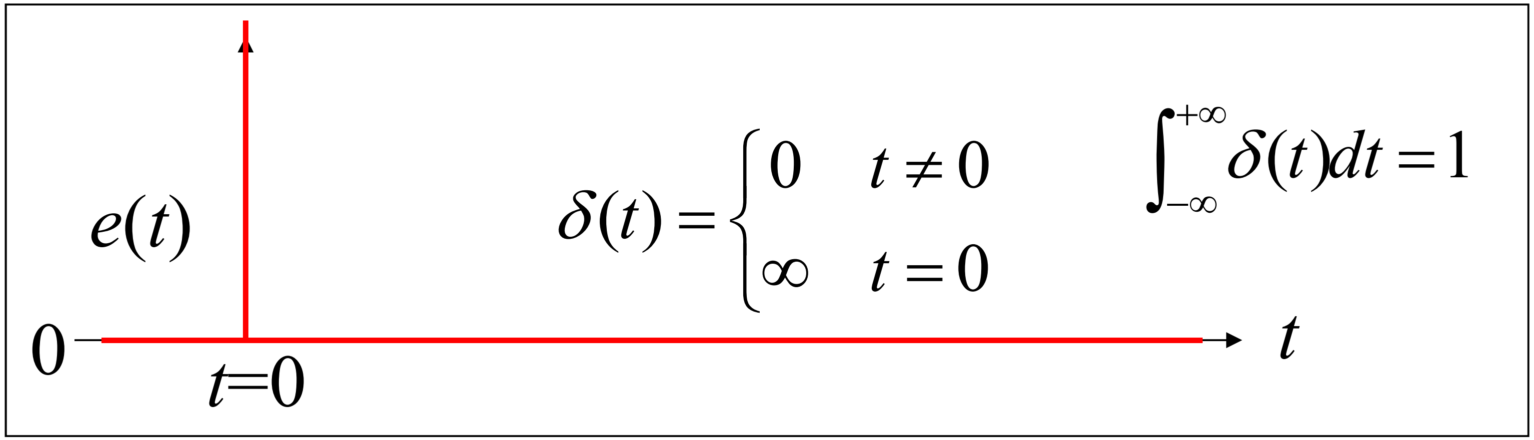




$$e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a\exp(-\alpha t) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\left[e(t)\right] = \frac{\alpha}{s+a}$$

$a=\alpha$, $\alpha \to \infty$の時 $\to$ デルタ関数$\delta(t) \Rightarrow \mathcal{L}[\delta(t)]=1$



$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\mathcal{L}\left[t^m \exp(-at)\right] = \int_0^{+\infty} t^m \exp\{-(s+a)t\}dt$$

$$= \left[-\frac{t^m \exp\{-(s+a)t\}}{s+a}\right]_0^{\infty} + \frac{m}{s+a}\int_0^{+\infty} t^{m-1} \exp\{-(s+a)t\}dt$$

$$= \frac{m}{s+a}\mathcal{L}\left[t^{m-1} \exp(-at)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}\left[t^m \exp(-at)\right] = \frac{m!}{(s+a)^{m+1}}$$

または

$$\mathcal{L}\left[t^{m-1} \exp(-at)\right] = \frac{(m-1)!}{(s+a)^m}$$

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\exp(j\omega t) - \exp(-j\omega t)}{2j}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\exp(-\alpha t)\sin(\omega t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\exp\{-(\alpha - j\omega)t\} - \exp\{-(\alpha + j\omega)t\}}{2j}\right]$$

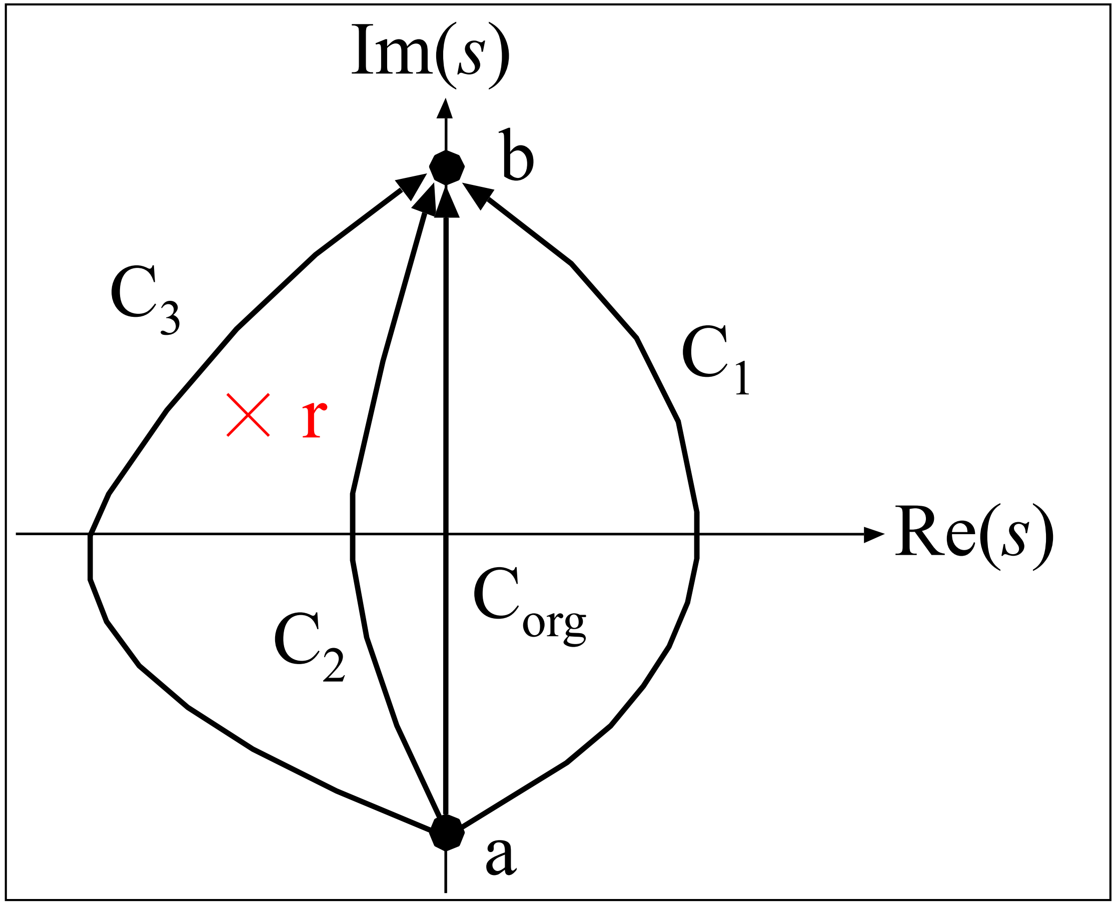
$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s+\alpha - j\omega} - \frac{1}{s+\alpha + j\omega}\right] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\exp(-\alpha t)\cos(\omega t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\exp\{-(\alpha - j\omega)t\} + \exp\{-(\alpha + j\omega)t\}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+\alpha - j\omega} + \frac{1}{s+\alpha + j\omega}\right] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

コーシー・リーマンの定理

区間$[a,b]$の範囲にわたって関数$F(s)$を積分することを考える。この時、関数値もしくはその一階微分が不連続な点を超えない限り、積分経路をどの様に変更しても、積分の結果は変わらない。



関数値が不連続な点(極): $f(x)=1/(x+a)$での$x=-a$

一階微分が不連続な点(分岐): $f(x)=(x+a)^{0.5}$での$x=-a$

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s)ds$$ の計算

$$F(s) = \frac{\exp(+st)}{s+\alpha}$$

$|s|\to\infty$であるC_1, C_5上で

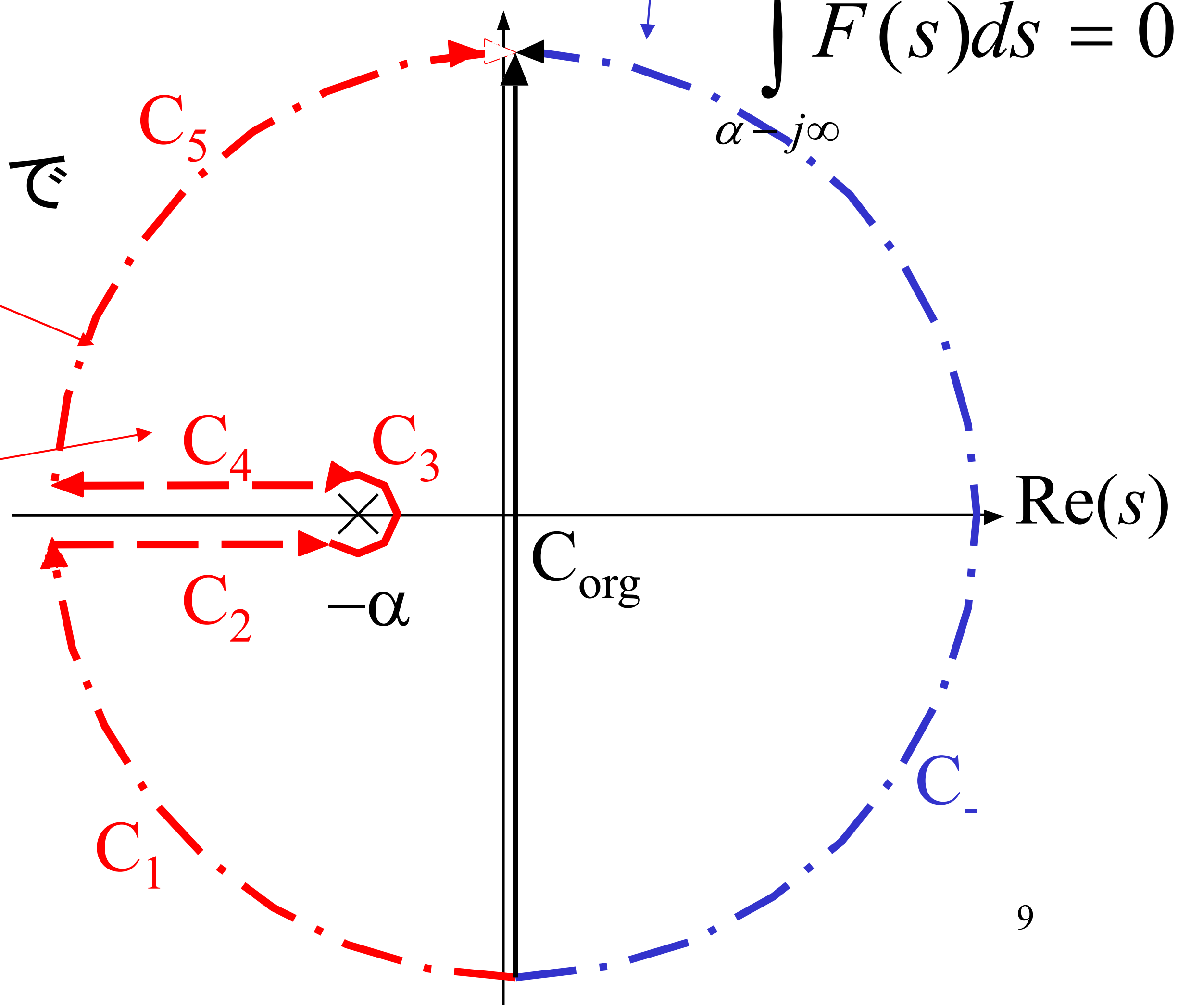
$F(s)$=0 (t>0の時)

同じ範囲を往復するので, C_2とC_4に沿う積分の和は零

$|s|\to\infty$であるC_-上で

$F(s)$=0 (t<0の時)

$$\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s)ds = 0$$



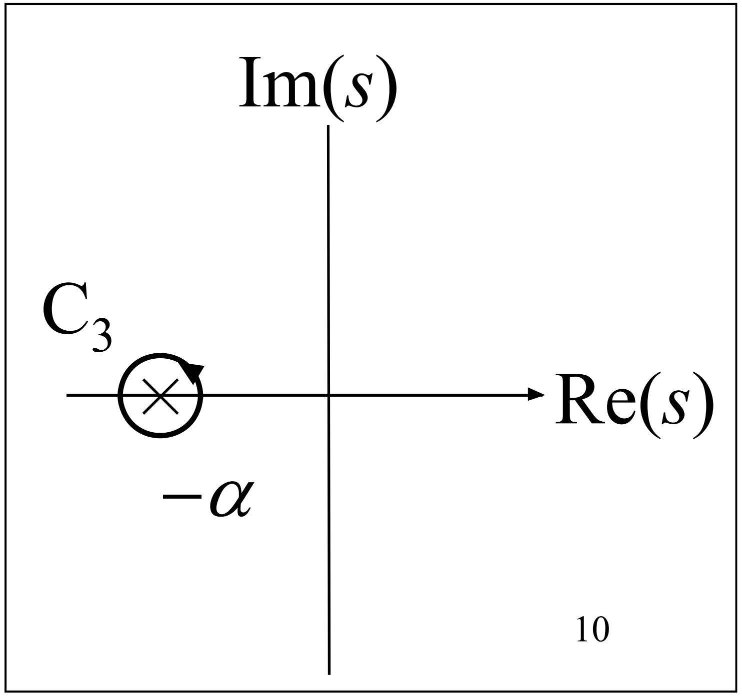
参考

$s=-\alpha+r\exp(j\theta)$とおけば、$ds=jr\exp(j\theta)d\theta$であるから

$$F(s)ds = j\exp(-\alpha t)\exp(rt\exp(j\theta))d\theta$$
$$= j\exp(-\alpha t)d\theta \quad (r \to 0)$$

従って、$t>0$の時

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} F(s)ds = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_3} F(s)ds$$
$$= \frac{\exp(-\alpha t)}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= \exp(-\alpha t)$$

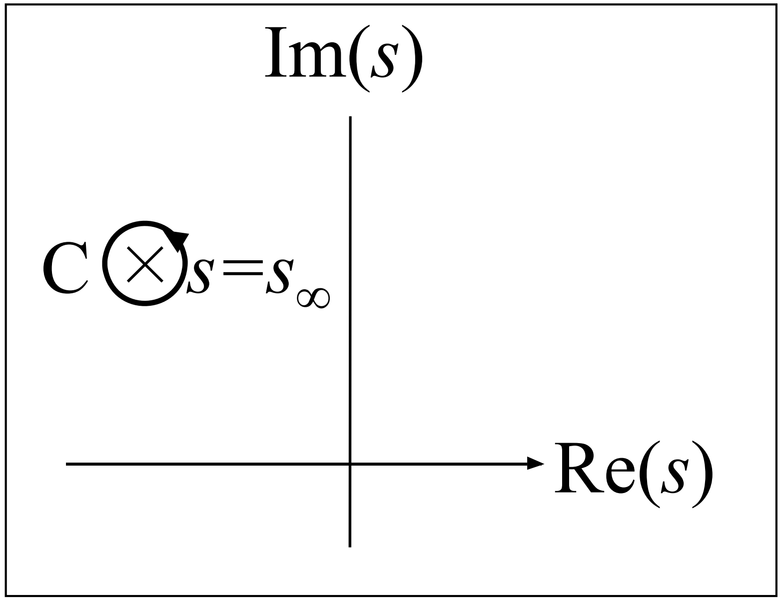


留数定理

$F(s)=N(s)/D(s)$とおく。$N(s_\infty)$は正則、$D(s_\infty)=0$、$D'(s_\infty)\neq 0$の時

$$\oint_C F(s)ds = j\theta \frac{N(s_\infty)}{D'(s_\infty)}$$

$$\equiv j\theta \operatorname*{Res}_{s=s_\infty}\left[F(s)\right]$$



θは$s=s_\infty$付近での回転角

反時計回り一回転は+2π

時計回り一回転は-2π

重根の場合

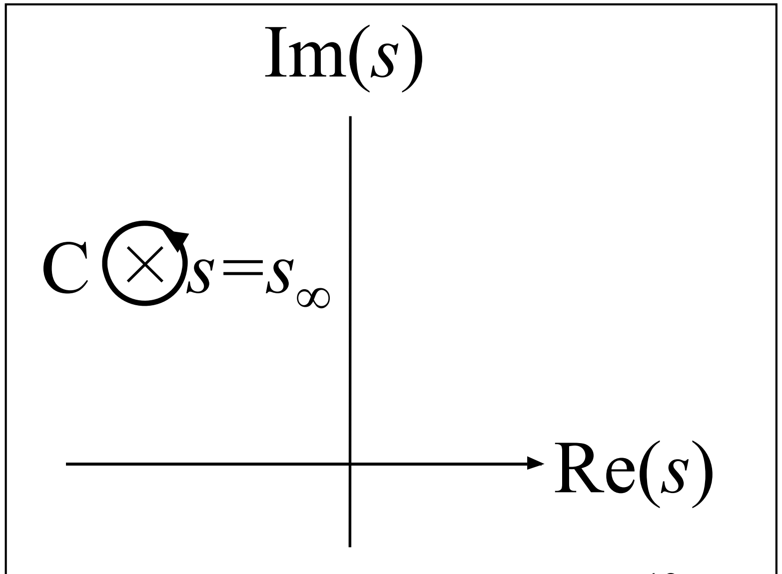
$F(s)=N(s)/D(s)$とおく。$N(s_\infty)$は正則、$D(s_\infty)^{(n)}=0\ (0\leq n\leq M\text{-}1)$、$D(s_\infty)^{(M)}\neq 0$の時

$$\oint_C F(s)ds = jM\theta\left[\frac{N^{(M-1)}(s_\infty)}{D^{(M)}(s_\infty)}\right]$$

θは$s=s_\infty$付近での回転角

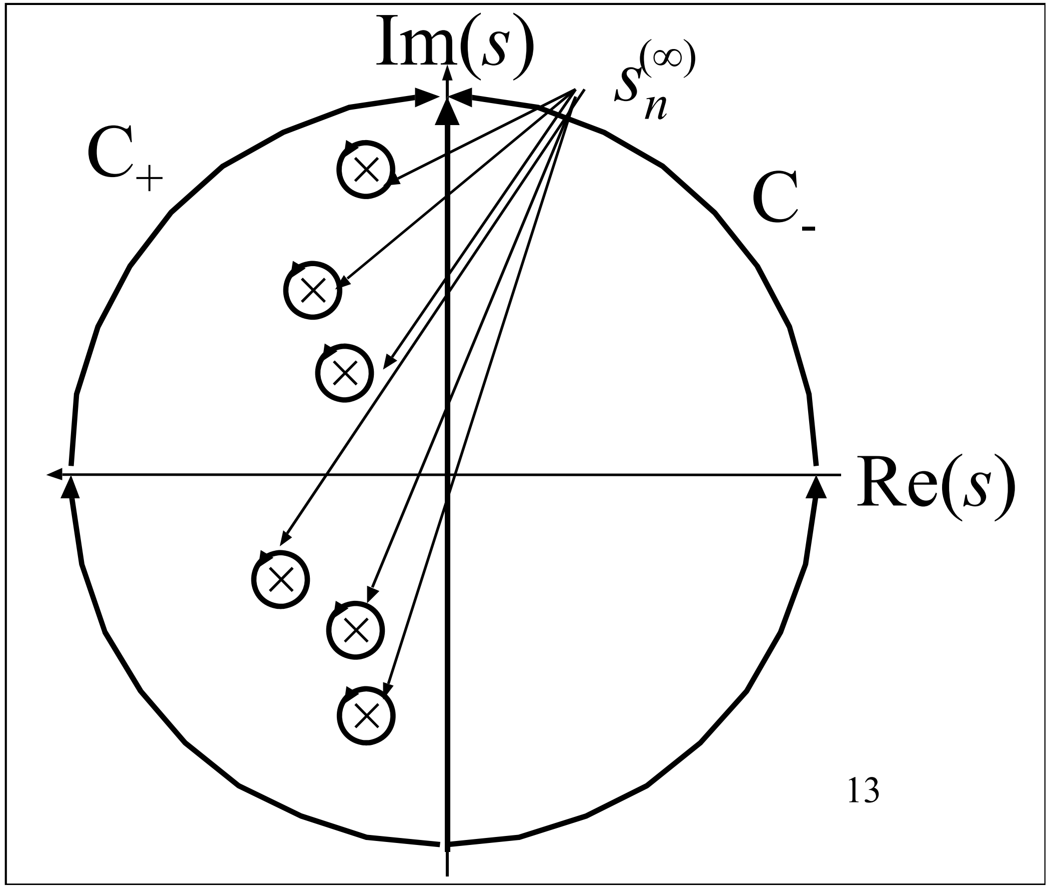
反時計回り一回転は+2π

時計回り一回転は-2π



極が沢山あると $e(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} E(s)\exp(st)ds$

$$= \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \sum_n \underset{s = s_n^{(\infty)}}{\mathrm{Res}}\left[E(s)\exp(st)\right] & (t > 0) \end{cases}$$



左半面に極が有れば，$e(t) \neq 0$ $(t < 0)$

極が沢山あると

$$F(s) = \frac{\prod_{n=1}^{N_0} (s + s_n^0)}{\prod_{n=1}^{N_\infty} (s + s_n^\infty)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n}{s + s_n^\infty}$$

$$A_m = \frac{\prod_{n=1}^{N_0} (s_n^0 - s_m^\infty)}{\prod_{n=1}^{N_\infty (n \neq m)} (s_n^\infty - s_m^\infty)}$$

左半面にある極のみが対象

これより

$$f(s)=\frac{(s+c)}{(s+a)(s+b)}$$

$$=\lim_{s=-a}\left[f(s)(s+a)\right]\frac{1}{s+a}+\lim_{s=-b}\left[f(s)(s+s)\right]\frac{1}{s+b}$$

$$=\frac{c-a}{b-a}\frac{1}{s+a}+\frac{c-b}{a-b}\frac{1}{s+b}$$

$$f(s)=\frac{(s+c)}{(s+a)^2}$$

$$=\lim_{s=-a}\left[f(s)(s+a)^2\right]\frac{1}{(s+a)^2}+\lim_{s=-a}\left[\frac{d}{ds}\left(f(s)(s+a)^2\right)\right]\frac{1}{s+a}$$

$$=\frac{c-a}{(s+a)^2}+\frac{1}{s+a}$$

計算例

$$\frac{(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{(4-1)(5-1)}{(2-1)(3-1)}\frac{1}{s+1}+\frac{(4-2)(5-2)}{(1-2)(3-2)}\frac{1}{s+2}+\frac{(4-3)(5-3)}{(1-3)(2-3)}\frac{1}{s+3}$$

$$=\frac{6}{s+1}-\frac{6}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

$$\frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$=\frac{(3-1)(4-1)}{(2-1)}\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{d}{ds}\left\{\frac{(s+3)(s+4)}{(s+2)}\right\}\Bigg|_{s=-1}\frac{1}{s+1}+\frac{(3-2)(4-2)}{(1-2)^2}\frac{1}{s+2}$$

$$=\frac{6}{(s+1)^2}-\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}$$

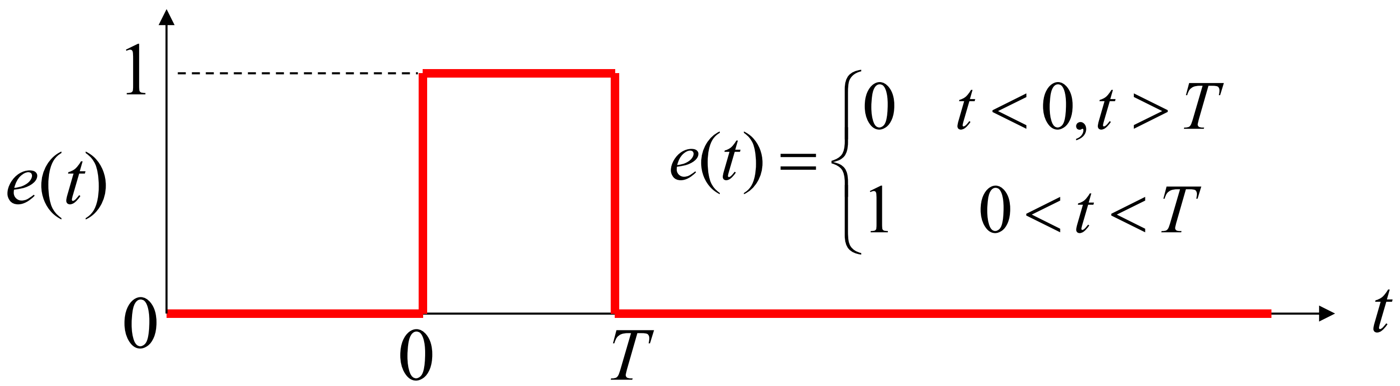
時間推移

$$\mathcal{L}[e(t-T)] = \int_0^\infty e(t-T)\exp(-st)dt$$

$$= \int_{-T}^\infty e(t')\exp\{-s(t'+T)\}dt' \qquad t'=t-T$$

$$= E(s)\exp(-sT)$$

単一パルス



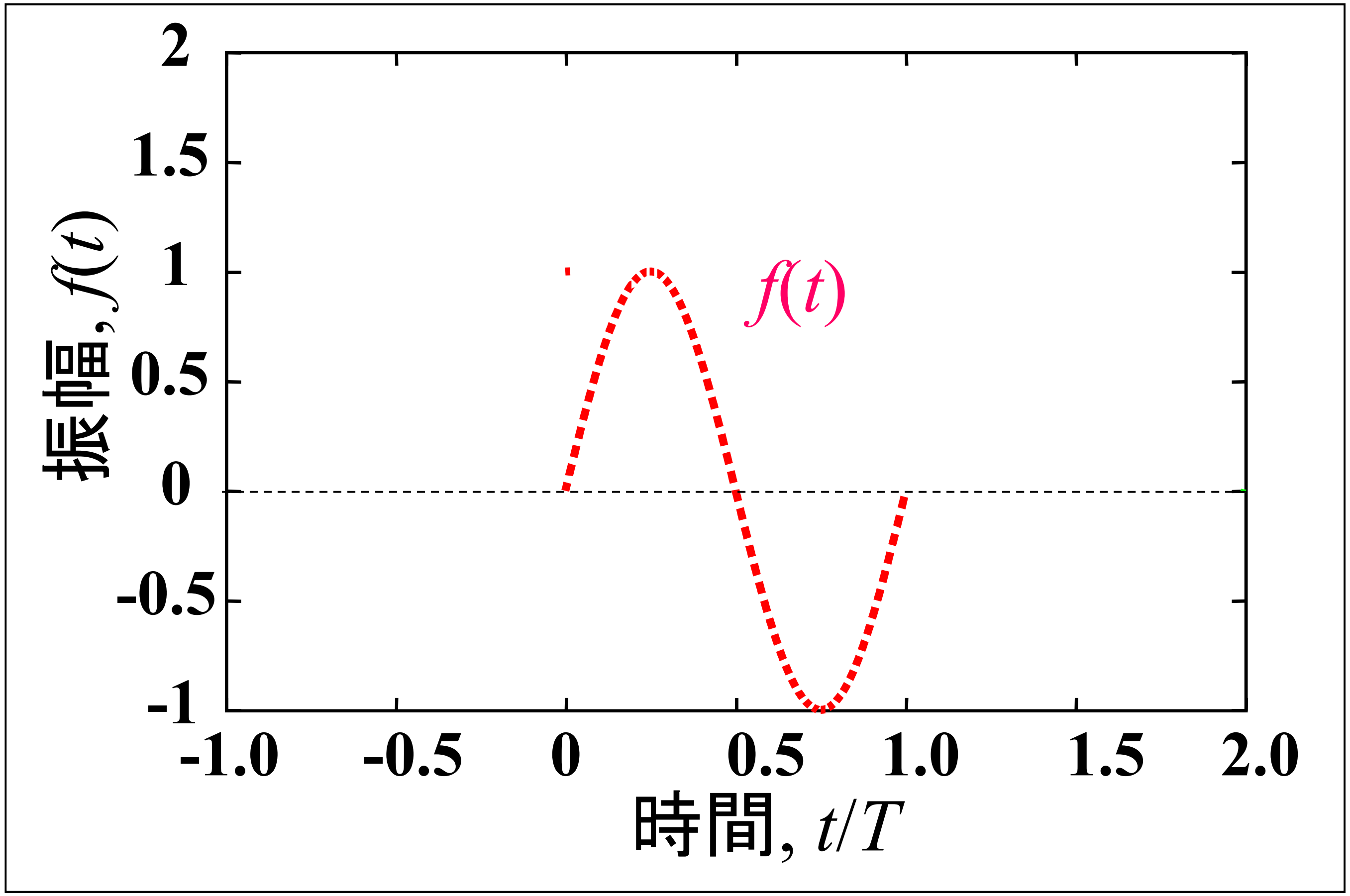
$$e(t) = \begin{cases} 0 & t<0, t>T \\ 1 & 0<t<T \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[u(t)] - \mathcal{L}[u(t-T)] = s^{-1}\{1-\exp(-sT)\}$$

単波交流パルスの波形

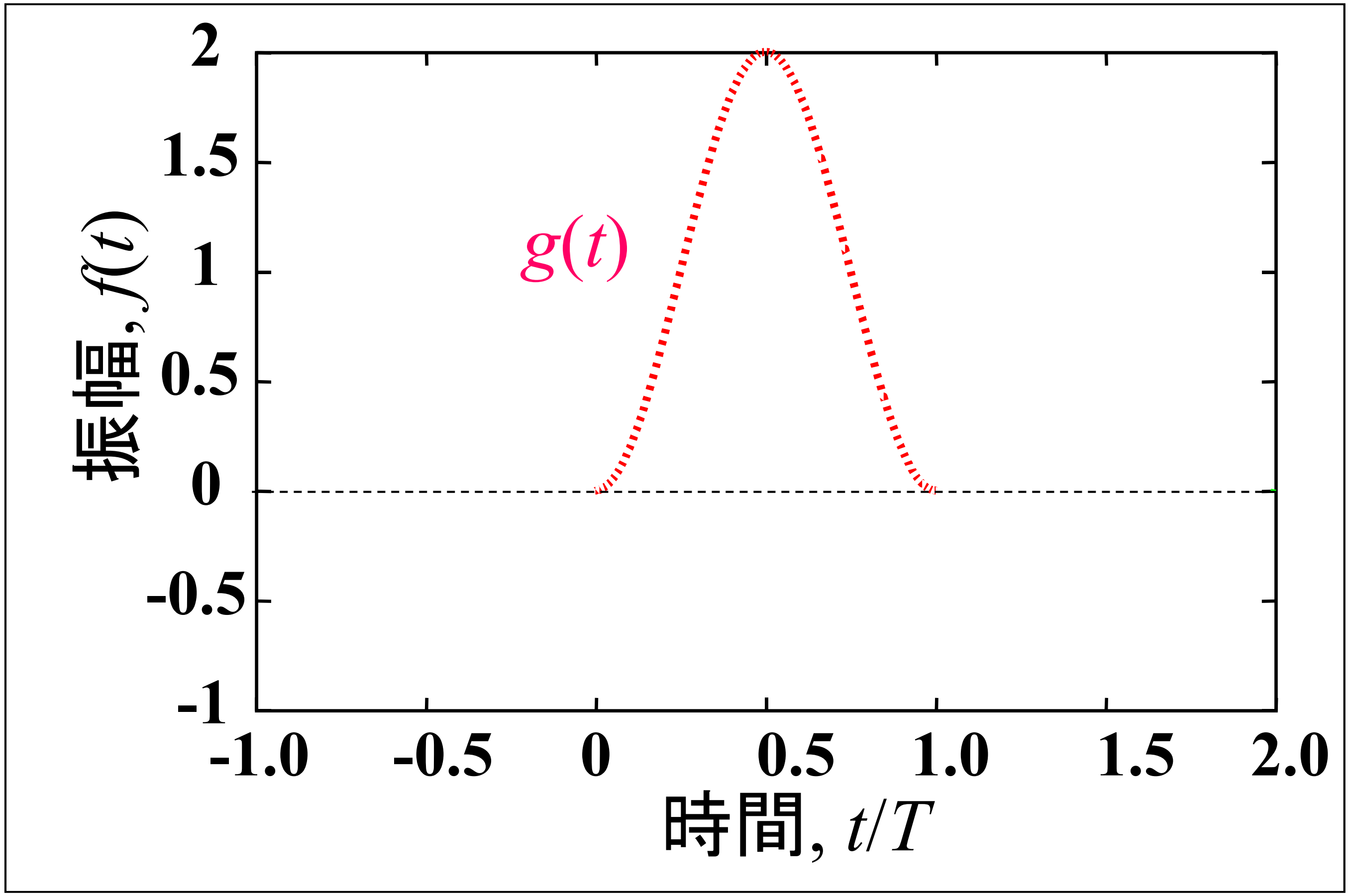
$$f(t) = \sin(\omega t)\{u(t) - u(t-T)\}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\{1 - \exp(-sT)\}$$



$$g(t) = \{1 - \cos(\omega t)\}\{u(t) - u(t-T)\}$$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right]\{1 - \exp(-sT)\}$$



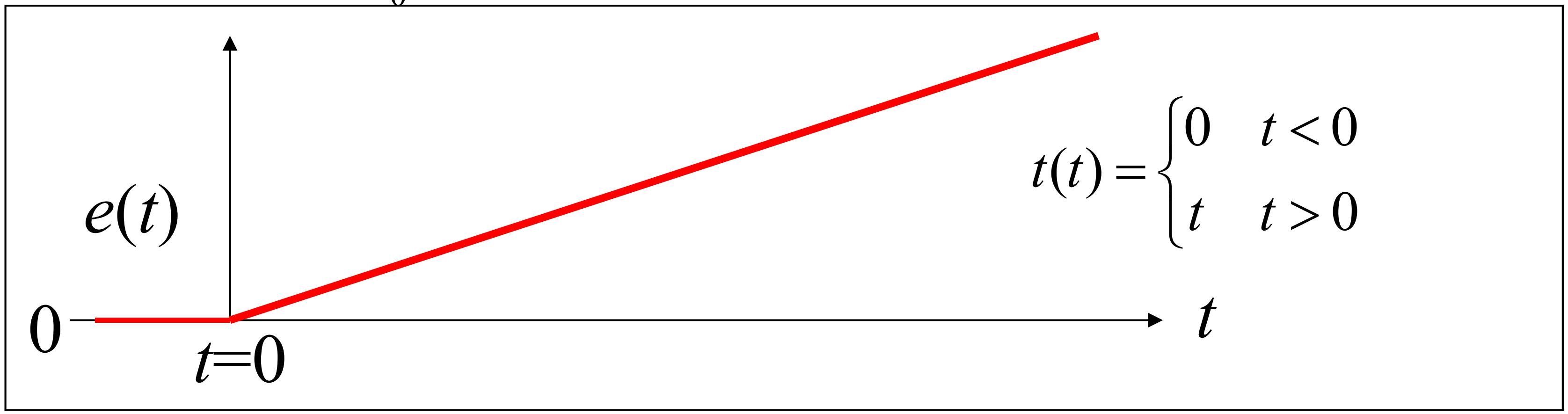
積分演算

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} e(t)dt\right] = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{t} e(t')dt'\exp(-st)dt$$

$$= -s^{-1}\left[\int_{-\infty}^{t} e(t')dt'\exp(-st)\right]_0^{\infty} + s^{-1}\int_0^{\infty} e(t)\exp(-st)dt$$

$$= s^{-1}E(s) + s^{-1}\int_{-\infty}^{0} e(t')dt'$$

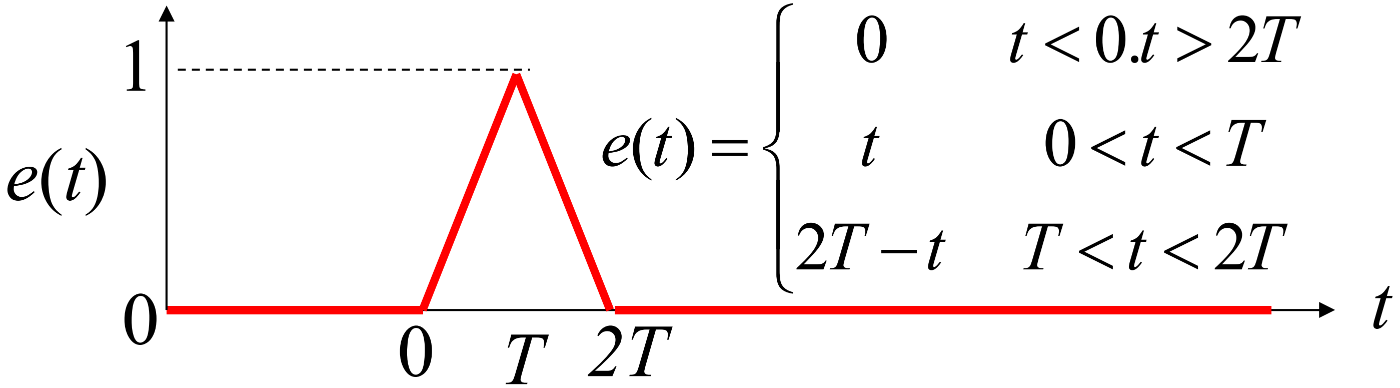
ランプ波 $\quad t(t) = \int_0^t u(t)dt$



$$t(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$$

$\mathcal{L}[t(t)]=s^{-2}$

三角パルス



$$e(t)=\begin{cases} 0 & t<0.t>2T \\ t & 0<t<T \\ 2T-t & T<t<2T \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e(t)\right] &= \mathcal{L}\left[t(t)\right]-2\mathcal{L}\left[t(t-T)\right]+\mathcal{L}\left[t(t-2T)\right] \\ &= s^{-2}\left[1-2\exp(-sT)+\exp(-2sT)\right]\end{aligned}$$

微分演算

$$\mathcal{L}\left[\frac{de(t)}{dt}\right]=\int_0^\infty \frac{de(t)}{dt}\exp(-st)dt$$

$$=\left[e(t)\exp(-st)\right]_0^\infty+s\int_0^\infty e(t)\exp(-st)dt$$

$$=sE(s)-e(0)$$

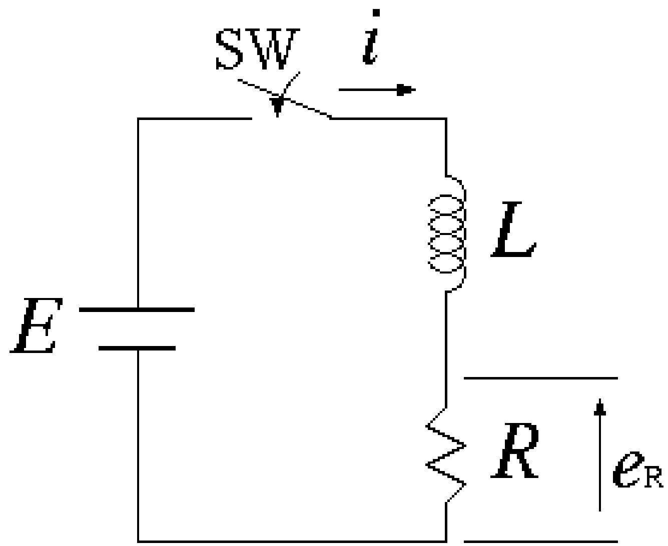
$$\mathcal{L}\left[\frac{d^N e(t)}{dt^N}\right]=\int_0^\infty \frac{d^N e(t)}{dt^N}\exp(-st)dt$$

$$=\left[\frac{d^{N-1}e(t)}{dt^{N-1}}\exp(-st)\right]_0^\infty+s\int_0^\infty \frac{d^{N-1}e(t)}{dt^{N-1}}\exp(-st)dt$$

$$=s\mathcal{L}\left[\frac{d^{N-1}e(t)}{dt^{N-1}}\right]-\left.\frac{d^{N-1}e(t)}{dt^{N-1}}\right|_{t=0}=s^N E(s)-\sum_{n=1}^{N}s^{n-1}\left.\frac{d^{n-1}e(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$$

計算例

t=0でSW on



t>0では

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E$$

$$e_R=Ri$$

であるから

$$I(s)=\mathcal{L}[i(t)],\ E_R(s)=\mathcal{L}[e_R(t)]$$

を定義すれば

注意！

$$L\left[sI(s)-i(0)\right]+RI(s)=\boxed{\frac{1}{s}}E$$

$$E_R(s)=RI(s)$$

を得る。

これを解くと

$$E_R(s) = R\frac{\frac{1}{s}E + Li(0)}{Ls + R} = R\frac{si(0) + E/L}{s(s + R/L)} = \frac{E}{s} + \frac{Ri(0) - E}{s + R/L}$$

逆変換を行うと、(t>0)において

$$e_R(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[E_R(s)\right] = E + \{Ri(0) - E\}\exp(-Rt/L)$$

t>0では

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0$$

$$e_R=Ri$$

であるから

$$L\left[sI(s)-i(0)\right]+RI(s)=0$$

$$E_R(s)=RI(s)$$

を得る。

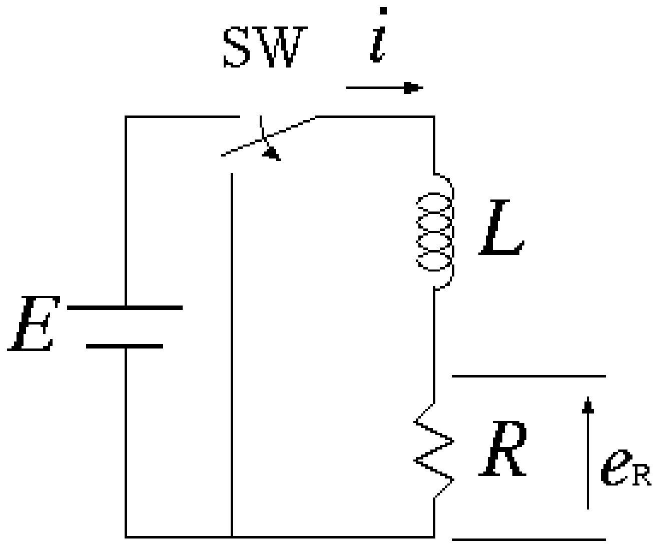
これを解くと

$$E_R(s)=R\frac{Li(0)}{Ls+R}=\frac{Ri(0)}{s+R/L}$$

逆変換を行うと、(t>0)において

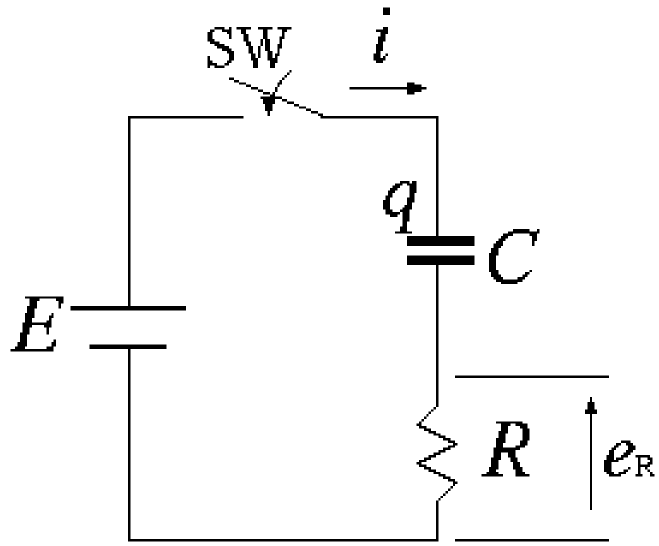
$$e_R(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[E_R(s)\right]=Ri(0)\exp(-Rt/L)$$

t=0でSW off



$$Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = E$$ から

t=0でSW on



$$e_R = Ri$$

注意！

$$RI(s) + \frac{1}{Cs}\left[I(s) + Q_0\right] = \boxed{\frac{1}{s}}E$$

$$E_R(s) = RI(s)$$

となる。ここで $Q_0 = \int_{-\infty}^{0} i\,dt$

これを解くと

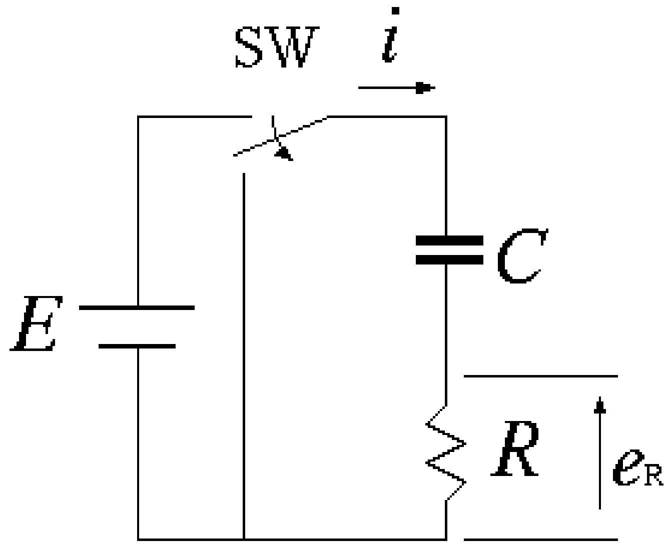
$$E_R(s) = R\frac{\frac{1}{s}E - \frac{1}{Cs}Q_0}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{E - Q_0/C}{s + \frac{1}{CR}}$$

逆変換を行うと

$$e_R(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[E_R(s)\right] = (E - Q_0/C)\exp(-t/CR)$$

$$Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = 0$$ から

t=0でSW off



$$e_R = Ri$$

$$RI(s) + \frac{1}{Cs}\left[I(s) + Q_0\right] = 0$$

$$E_R(s) = RI(s)$$

となる。ここで $Q_0 = \int_{-\infty}^{0} i\,dt$

これを解くと

$$E_R(s) = R\frac{-\frac{1}{Cs}Q_0}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{-Q_0/C}{s + \frac{1}{CR}}$$

逆変換を行うと

$$e_R(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[E_R(s)\right] = -(Q_0/C)\exp(-t/CR)$$

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt = E$$ から

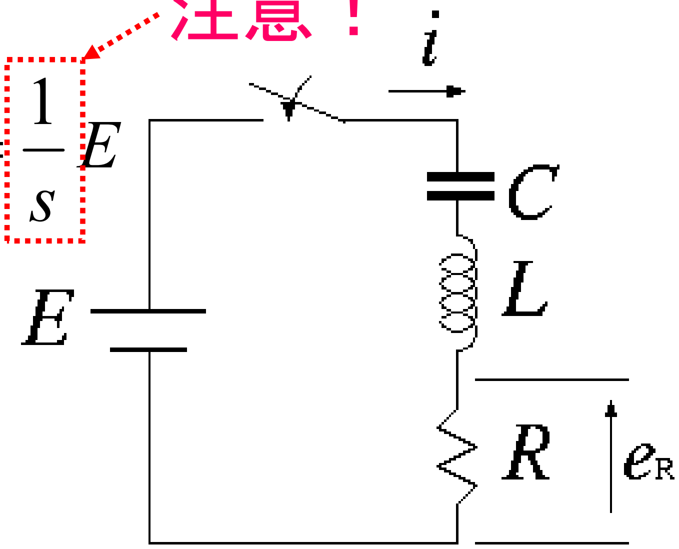
t=0でSW on

$$e_R = Ri$$

注意！

$$L[sI(s)-i(0)]+RI(s)+\frac{1}{Cs}\left[I(s)+Q_0\right]=\boxed{\frac{1}{s}}E$$

$$E_R(s) = RI(s)$$



となる。ここで $Q_0 = \int_{-\infty}^{0} idt$

これを解くと

$$E_R(s) = R\frac{Li(0)+\frac{1}{s}E-\frac{1}{Cs}Q_0}{Ls+R+\frac{1}{Cs}} = R\frac{si(0)+\frac{1}{L}E-\frac{1}{LC}Q_0}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$ の2根 $$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}$$ とすれば

$$E_R(s)=R\frac{si(0)+\frac{1}{L}V-\frac{1}{LC}Q_0}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

$$=R\frac{s_1 i(0)+\frac{1}{L}V-\frac{1}{LC}Q_0}{s_1-s_2}\frac{1}{s-s_1}+R\frac{s_2 i(0)+\frac{1}{L}V-\frac{1}{LC}Q_0}{s_2-s_1}\frac{1}{s-s_2}$$

逆変換を行うと

$$e_R(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[E_R(s)\right]$$

$$=R\frac{s_1 i(0)+\frac{1}{L}E-\frac{1}{LC}Q_0}{s_1-s_2}\exp(s_1 t)+R\frac{s_2 i(0)+\frac{1}{L}E-\frac{1}{LC}Q_0}{s_2-s_1}\exp(s_2 t)$$

重根の時　$s_1 = -R/2L$　とすれば

$$E_R(s) = R\frac{si(0) + \frac{1}{L}V - \frac{1}{LC}Q_0}{(s-s_1)^2}$$

$$= R\frac{i(0)}{s-s_1} + R\frac{s_1 i(0) + \frac{1}{L}V - \frac{1}{LC}Q_0}{(s-s_1)^2}$$

逆変換を行うと

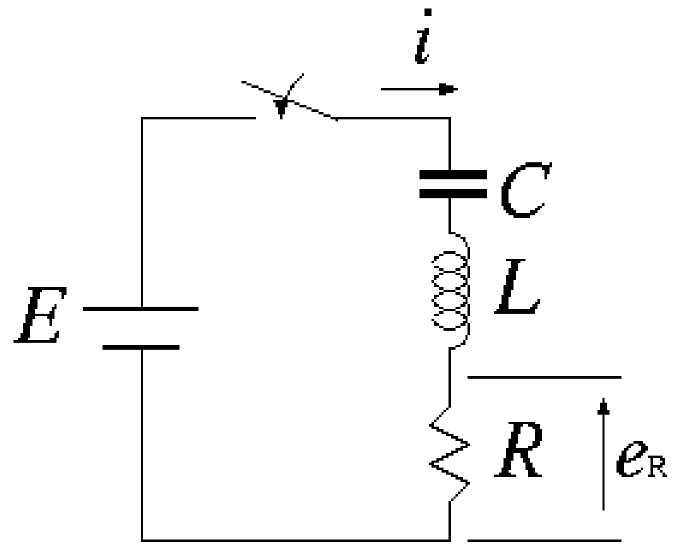
$$e_R(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[E_R(s)\right]$$

$$= Ri(0)\exp(s_1 t) + R\left\{s_1 i(0) + \frac{1}{L}V - \frac{1}{LC}Q_0\right\} t\exp(s_1 t)$$

別解法

t=0でSW on

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{q}{C}=E$$ から



$$i=\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\mathbf{H}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}0\\E/L\end{pmatrix}$$

ここで $$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}q\\i\end{pmatrix}\quad \mathbf{H}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1/LC & -R/L\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_t(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(\infty)\quad \boldsymbol{x}(\infty)=-\mathbf{H}^{-1}\begin{pmatrix}0\\E/L\end{pmatrix}$$ とすれば

$$\frac{d\boldsymbol{x}_t(t)}{dt}=\mathbf{H}\boldsymbol{x}_t(t)$$

ラプラス変換は $s\boldsymbol{X}_t(s) - \boldsymbol{x}_t(0) = \mathbf{H}\boldsymbol{X}_t(s)$

$$[\mathbf{H} - s\mathbf{I}]\boldsymbol{X}_t(s) = -\boldsymbol{x}_t(0)$$

ここで、$\mathbf{I}$は単位行列

行列$\mathbf{H}$はその固有値s_nを対角要素とするベクトル$\mathbf{S}$と固有ベクトル$\mathbf{A}$により、$\mathbf{H}=\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}$と表現できる。

$\mathbf{H} - s\mathbf{I} = \mathbf{A}\{\mathbf{S} - s\mathbf{I}\}\mathbf{A}^{-1}$ から $\boldsymbol{X}_t(s) = \mathbf{A}\{s\mathbf{I} - \mathbf{S}\}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{x}_t(0)$

$$\boldsymbol{x}_t(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\boldsymbol{X}_t(s)\right] = \mathbf{A}\mathcal{L}^{-1}\left[\{s\mathbf{I} - \mathbf{S}\}^{-1}\right]\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{x}_t(0) = \mathbf{A}\mathbf{E}(t)\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{x}_t(0)$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_t(t) + \boldsymbol{x}(\infty) = \mathbf{A}\mathbf{E}(t)\mathbf{A}^{-1}\left[\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}(\infty)\right] + \boldsymbol{x}(\infty)$$

ここで、$\mathbf{E}(t)$は$\exp(s_n t)$を要素とする対角行列

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{pmatrix}$$

固有値s_n 固有ベクトル$\mathbf{A}$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$$

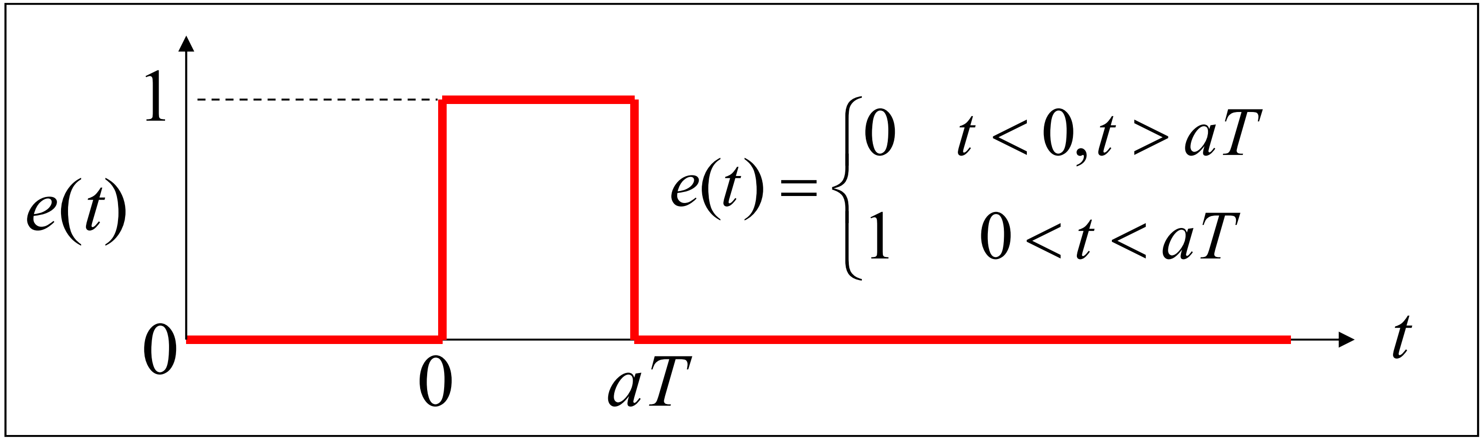
$$\mathbf{AE}(t)\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(s_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(s_2 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s_2 - s_1} \begin{pmatrix} \exp(s_1 t) & \exp(s_2 t) \\ s_1 \exp(s_1 t) & s_2 \exp(s_2 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 & -1 \\ -s_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{s_2 - s_1} \begin{pmatrix} s_2 \exp(s_1 t) - s_1 \exp(s_2 t) & -\exp(s_1 t) + \exp(s_2 t) \\ s_1 s_2 \{\exp(s_1 t) - \exp(s_2 t)\} & -s_1 \exp(s_1 t) + s_2 \exp(s_2 t) \end{pmatrix}$$

スケーリング $\Rightarrow \quad \mathcal{L}\left[e(at)\right] = a^{-1}E(s/a)$

単一パルスの例



$$\mathcal{L}\left[e(t)\right] = s^{-1}\{1 - \exp(-asT)\}$$

$$= a(as)^{-1}\{1 - \exp(-asT)\}$$

スケール則

$$\mathcal{L}\left[e(at)\right] = \int_0^\infty e(at)\exp(-st)dt$$

$$= a^{-1}\int_0^\infty e(t')\exp(-a^{-1}sat')dt' \qquad t'=at$$

$$= a^{-1}E(a^{-1}s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[E(as)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} E(as)\exp(st)ds$$

$$s'=as$$

$$= a^{-1}\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} E(s')\exp(s'a^{-1}t)ds'$$

$$= a^{-1}e(a^{-1}t)$$

初期値定理

$$e(0)=\lim_{s\to\infty}\left[sE(s)\right]$$

$$sE(s)=-\left[e(t)\exp(-st)\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{de(t)}{dt}\exp(-st)dt$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$e(0)\ \ @\,\mathrm{s}\to\infty \qquad\qquad 0\ \ @\,\mathrm{s}\to\infty$$

最終値定理

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}\left[sE(s)\right]$$

$$sE(s)=-\left[e(t)\exp(-st)\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{de(t)}{dt}\exp(-st)dt$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$e(0)\ \ @\,\mathrm{s}\to\infty \qquad\qquad e(\infty)-e(0)\ \ @\,\mathrm{s}\to 0$$

畳み込み積分

$$\mathcal{L}\left[e(t)f(t)\right]=\int_0^{\infty}e(t)f(t)\exp(-st)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}E(s')\int_0^{\infty}f(t)\exp\{-(s-s')t\}dtds'$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}E(s')F(s-s')ds'$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[E(s)F(s)\right]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}E(s)\int_0^{\infty}f(t')\exp(-st')dt'\exp(st)ds$$

$$=\int_0^{\infty}f(t')\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}E(s)\exp\{s(t-t')\}ds\right]dt'$$

$$=\int_0^{\infty}f(t')e(t-t')dt'$$