

令和2年9月25日版

回路理論II

Part 4:分布定数回路

千葉大学工学部

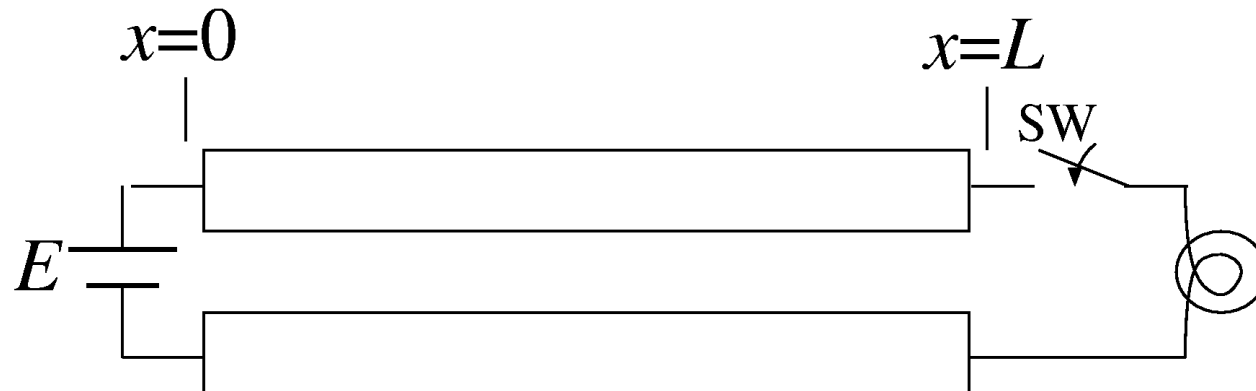
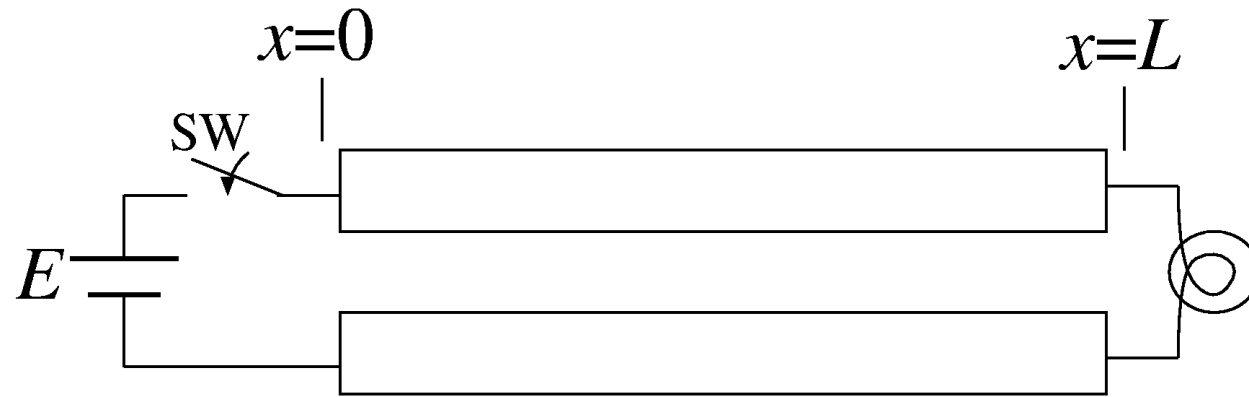
総合工学科電気電子工学コース

橋本研也

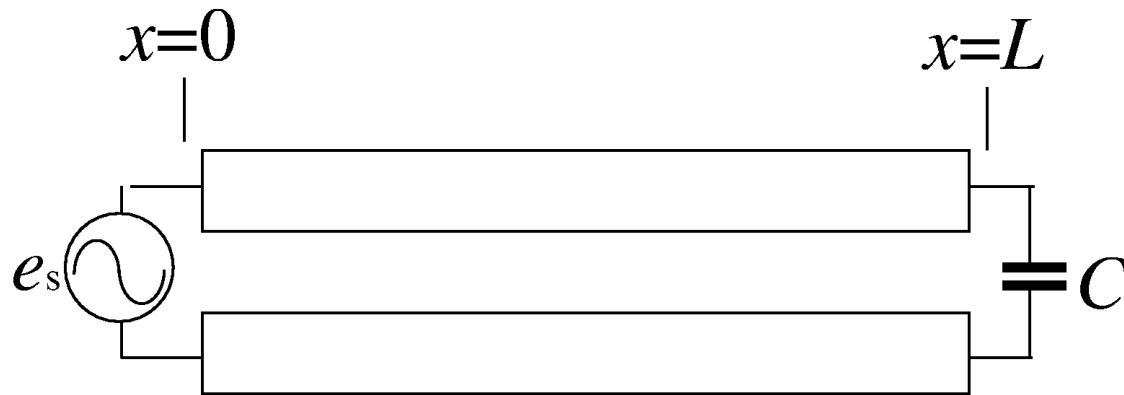
k.hashimoto@ieee.org

<http://www.te.chiba-u.jp/~ken>

L が長い時、SWオン後の応答は？



L が長い時、電流の位相遅れは？



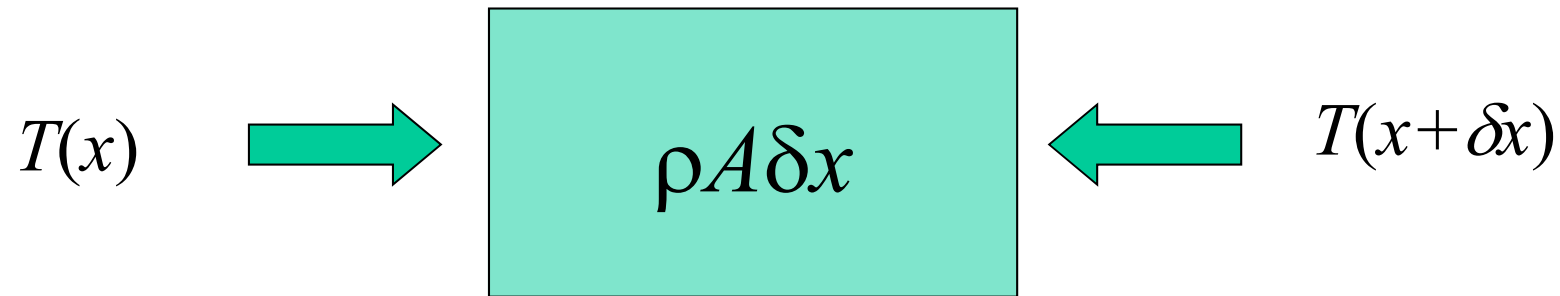
伝送路内での位相遅れが無視できる時

⇒ 集中定数回路で解析可能

伝送路内での位相遅れが無視できない時

⇒ 分布定数回路での解析必要

連続体の運動方程式



T : 応力、 ρ : 質量密度、 A : 断面積

運動方程式
$$\rho A \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x + \delta x) A - T(x) A$$

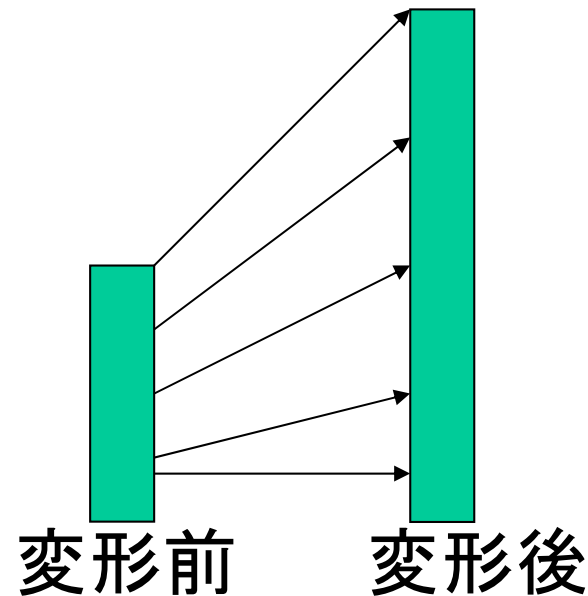
u : 変位

$\delta x \rightarrow 0$ では
$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T(x + \delta x) - T(x)}{\delta x} = \frac{\partial T(x)}{\partial x}$$

フックの法則

$$T(x) = cS(x) = c \frac{\partial u(x)}{\partial x}$$

S : 歪、 c : 弾性率



運動方程式に代入すると ➡ 波動方程式

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}$$

一般解 $u(x, t) = f_+(t - x/v) + f_-(t + x/v)$

+ x への進行波

- x への進行波

ここで $v = \sqrt{c/\rho}$: 波の速度

マクスウェルの方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

z 伝播平面波の場合 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ であるから

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial D_y}{\partial t}$$

真空中では

$$D_x = \varepsilon_0 E_x, \quad D_y = \varepsilon_0 E_y$$

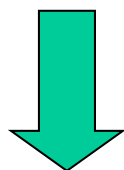
$$B_x = \mu_0 H_x, \quad B_y = \mu_0 H_y$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

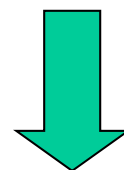
$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$



波動方程式

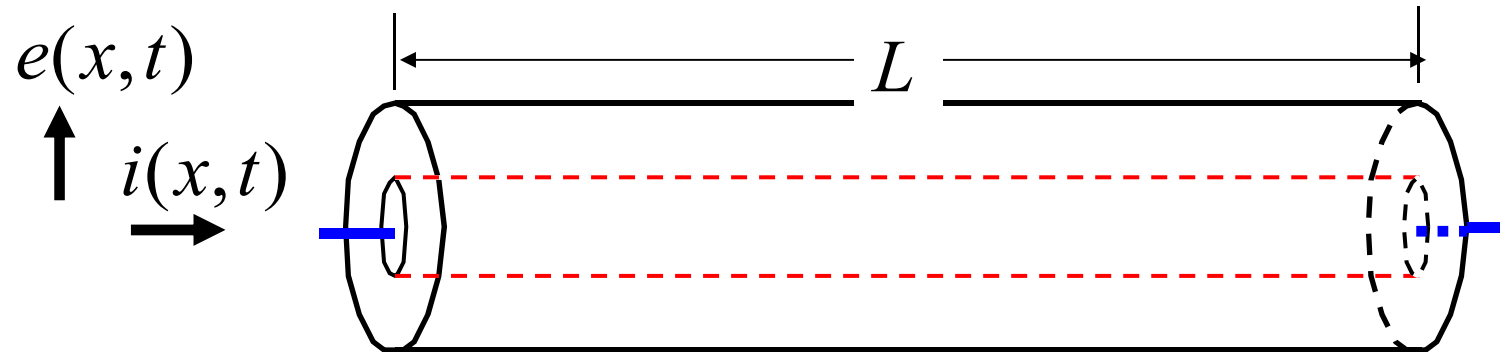


$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

ここで $v = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

同軸線路 (径が波長より十分小)



$$-\frac{\partial e}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial e}{\partial t} + Ge$$

静電界、静磁界では

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \log(b/a)$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\log(b/a)}$$

e : 電圧

i : $+x$ 方向の電流

L : 単位長当たりのインダクタンス

R : 単位長当たりの抵抗

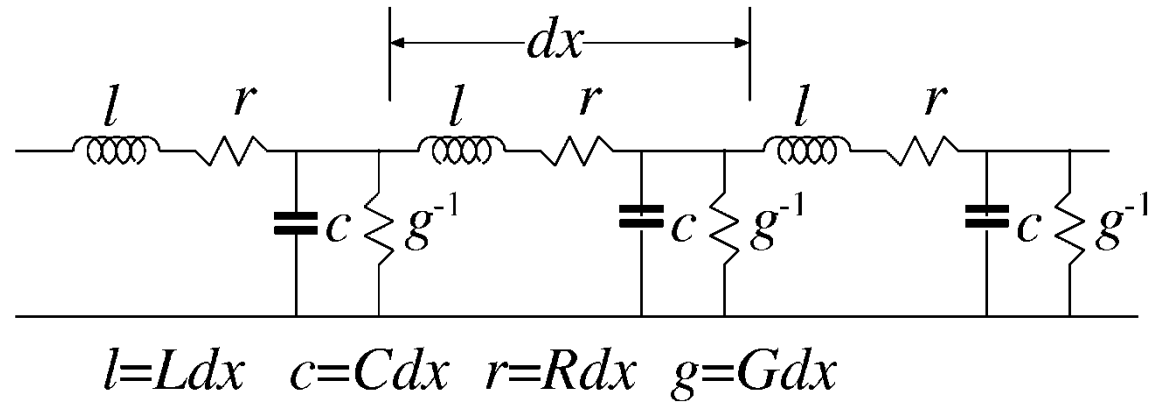
C : 単位長当たりのキャパシタンス

G : 単位長当たりの漏洩コンダクタンス

電信方程式

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial e}{\partial t} + Ge$$

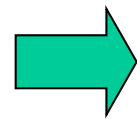


回路的表現

R, G を無視すると

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial e}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

ここで $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$e(x, t) = e_+(t - x/v) + e_-(t + x/v)$$

$$i(x, t) = i_+(t - x/v) + i_-(t + x/v)$$

+xへの進行波

-xへの進行波

$$e(x, t) = e_+(t - x/v) + e_-(t + x/v) \quad \text{から}$$

$$i(x, t) = i_+(t - x/v) + i_-(t + x/v)$$

$$\frac{\partial e(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial e_+(t - x/v)}{\partial(t - x/v)} + \frac{\partial e_-(t + x/v)}{\partial(t + x/v)}$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial e_+(t - x/v)}{\partial(t - x/v)} + \frac{1}{v} \frac{\partial e_-(t + x/v)}{\partial(t + x/v)}$$

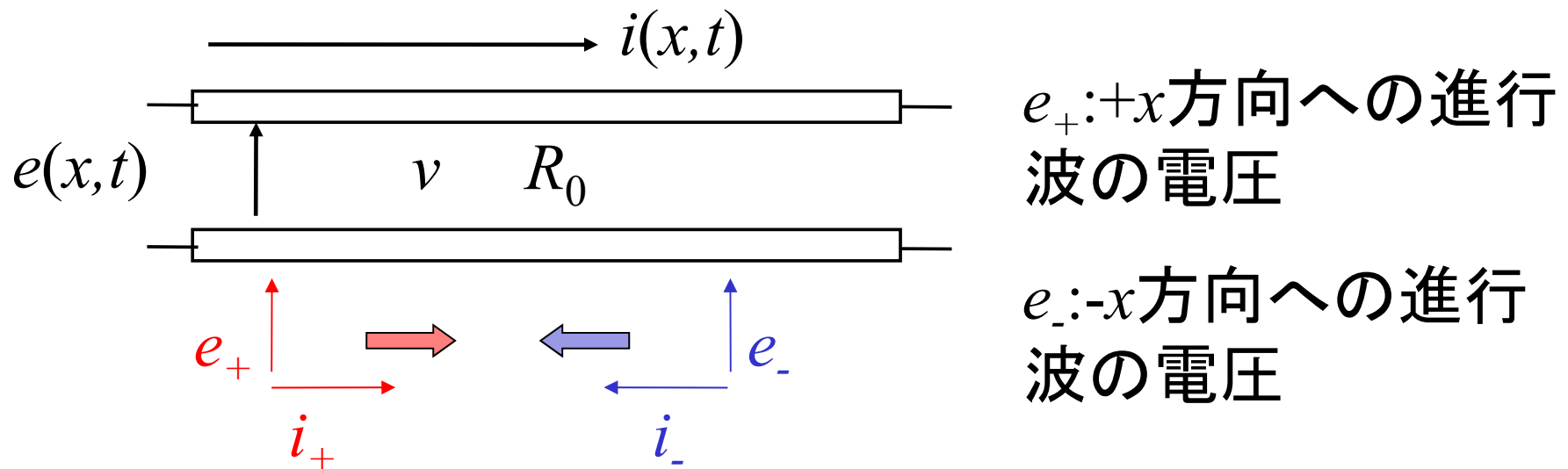
$$-\frac{\partial e}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{に代入すると} \quad \frac{\partial \left[e_{\pm}(t \mp x/v) \mp \sqrt{\frac{L}{C}} i_{\pm}(t \mp x/v) \right]}{\partial(t \mp x/v)} = 0$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial e}{\partial t}$$

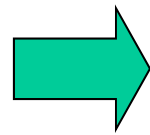
$$\Rightarrow e_{\pm}(t \mp x/v) = \pm \sqrt{\frac{L}{C}} i_{\pm}(t \mp x/v)$$

特性インピーダンス R_0

$$e_{\pm} = \pm R_0 i_{\pm} \quad \text{ここで} \quad R_0 = \sqrt{L/C}$$



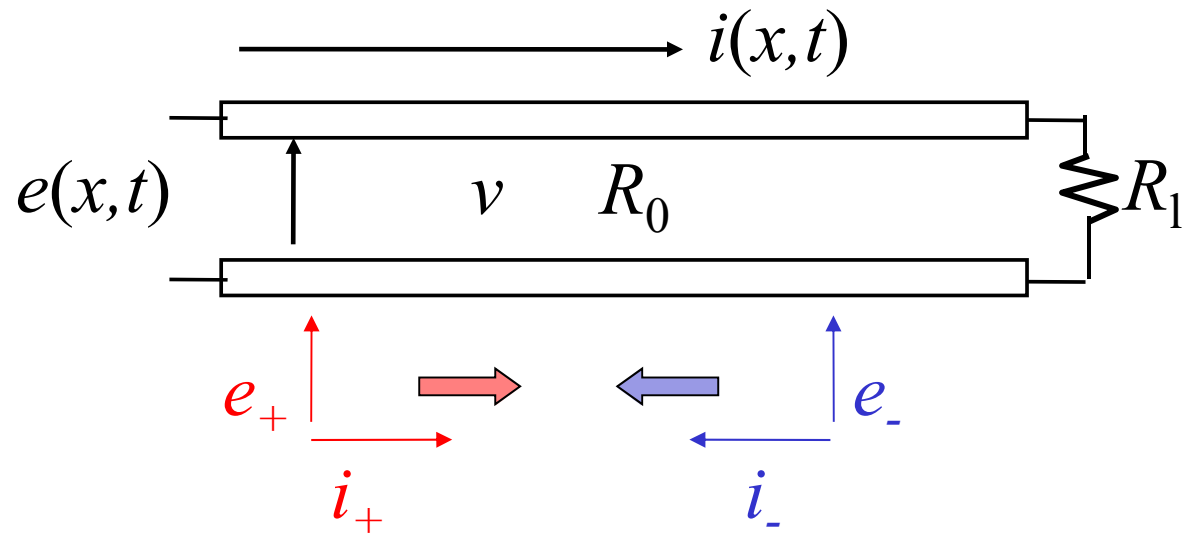
$$R_0 = \frac{e_{\pm}}{i_{\pm}}$$



$$e(x,t) = e_+(t - x/v) + e_-(t + x/v)$$

$$i(x,t) = R_0^{-1} [e_+(t - x/v) - e_-(t + x/v)]$$

境界での反射



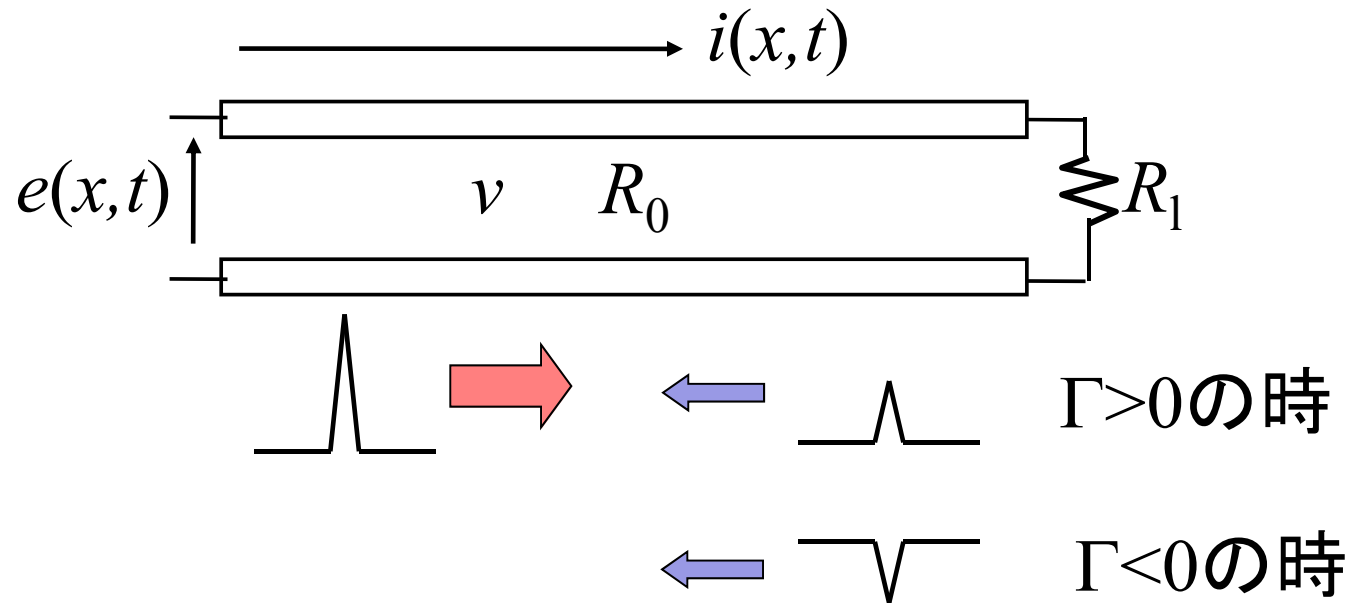
$e(t,L) = R_1 i(t,L)$ から

電圧反射率

➡
$$\Gamma = \frac{e_-(t + L/v)}{e_+(t - L/v)} = \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0}$$

電圧反射係数 Γ

$$\Gamma = \frac{e_-(t + L/v)}{e_+(t - L/v)} = \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0}$$



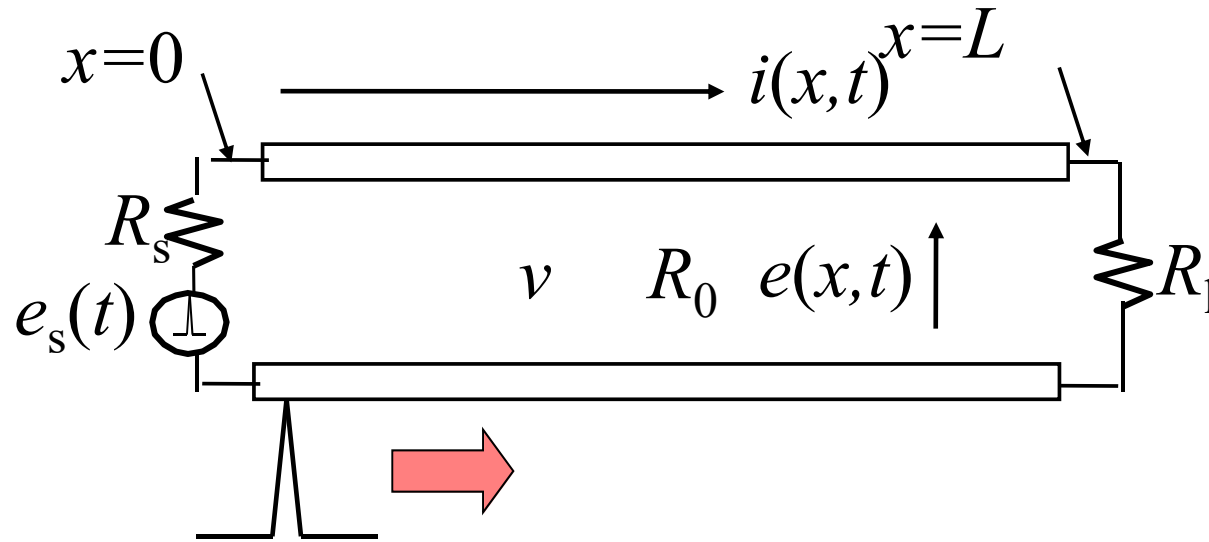
$R_1 = \infty$ の時、 $\Gamma = 1$

$R_1 = 0$ の時、 $\Gamma = -1$

$R_1 = R_0$ の時、 $\Gamma = 0$ (インピーダンス整合)

$R_1 \geq 0$ であるから、 $|\Gamma| \leq 1$

パルスの入射 最初は反射波無し！



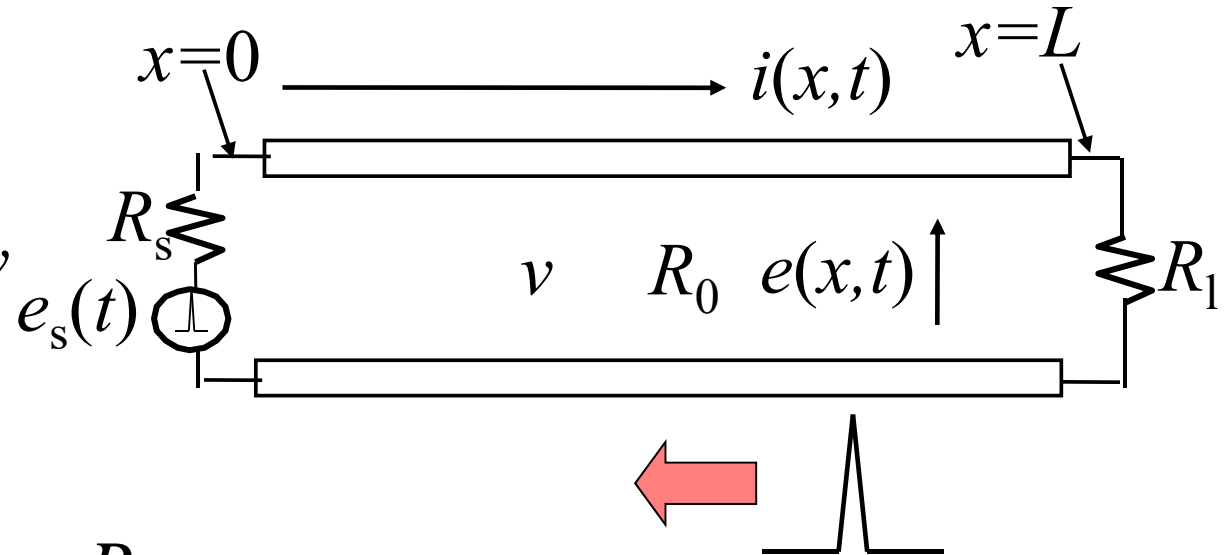
$e_s(t) - R_s i_+(0, t) = e_+(0, t)$ であるから、

$$i_+(0, t) = R_0^{-1} e_+(0, t)$$

$$e_+(0, t) = \frac{R_0}{R_s + R_0} e_s(t) \quad \Rightarrow \quad e_+(x, t) = \frac{R_0}{R_s + R_0} e_s(t)$$

時系列解析

片道走行時間 $T=L/v$



$0 \leq t \leq T$ では e_+ のみ

$$e(x,t) = e_+(x,t) = \frac{R_0}{R_s + R_0} e_s(t - x/v)$$

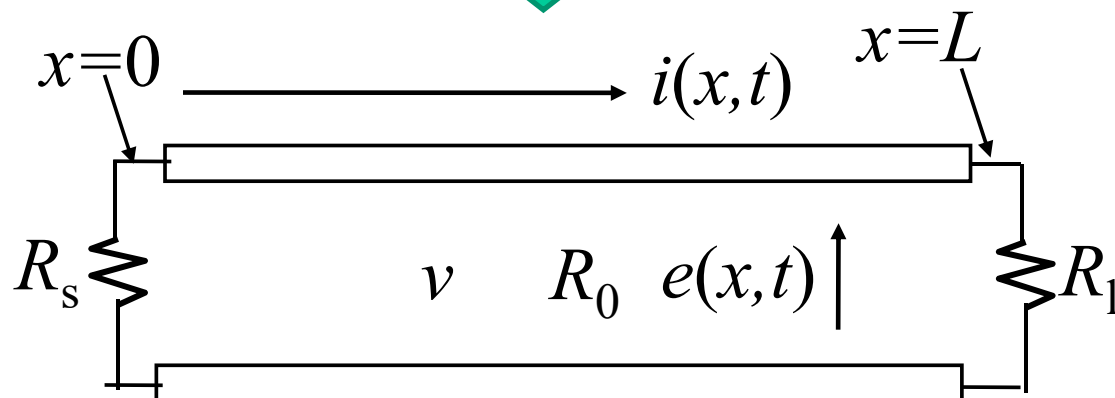
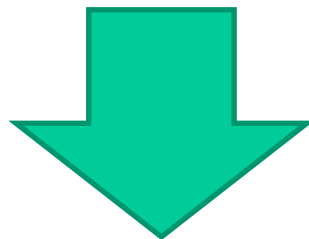
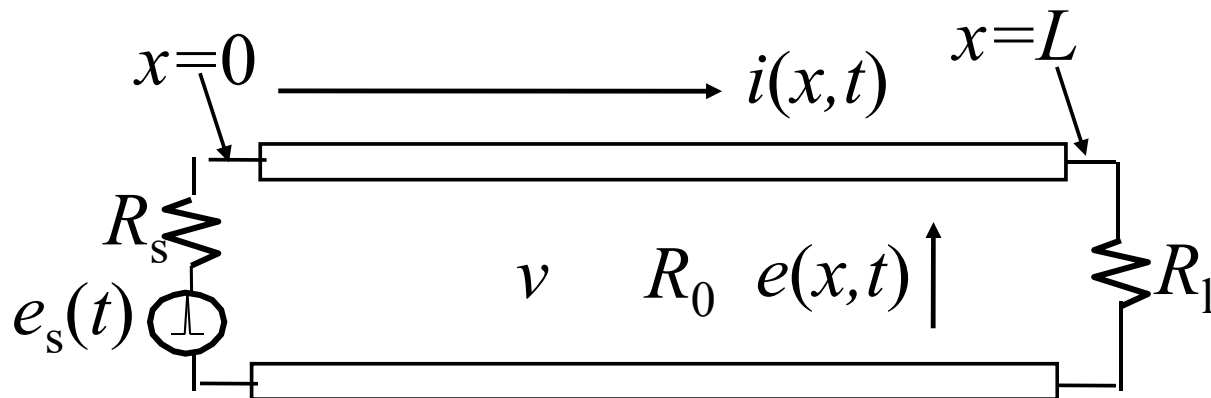
$T \leq t \leq 2T$ では e_- のみ

$$e(x,t) = e_-(x,t) = \Gamma_1 \frac{R_0}{R_s + R_0} e_s(t - 2T + x/v)$$

ここで
$$\Gamma_1 = \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0}$$

時系列解析

$T > 0$ で以下の2つは等価



時系列解析続き (n は整数)

$2nT \leq t \leq (2n+1)T$ では e_+ のみ

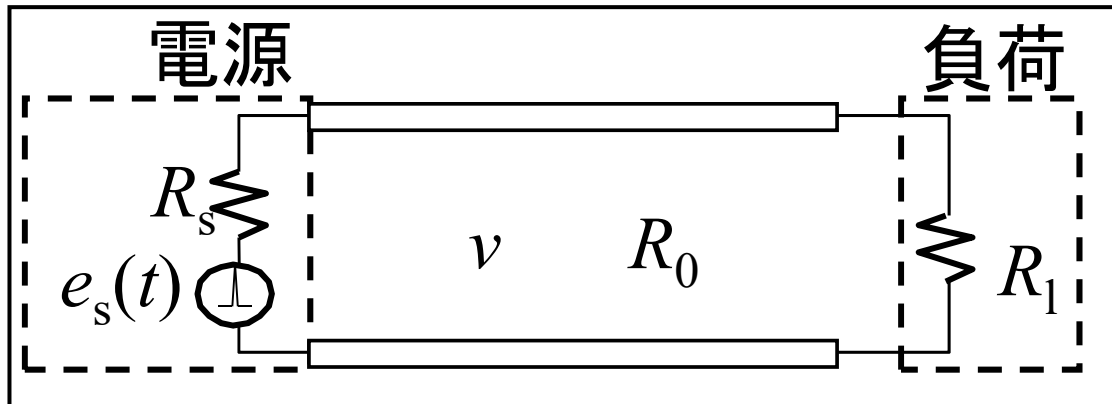
$$e(x, t) = e_+(x, t) = \Gamma_s^n \Gamma_1^n \frac{R_0}{R_s + R_0} e_s(t - 2nT - x/v)$$

ここで $\Gamma_s = \frac{R_s - R_0}{R_s + R_0}$

$(2n+1)T \leq t \leq (2n+2)T$ では e_- のみ

$$e(x, t) = e_-(x, t) = \Gamma_s^n \Gamma_1^{n+1} \frac{R_0}{R_s + R_0} e_s(t - (2n+2)T + x/v)$$

一般の信号の場合 $\Rightarrow$ すべての応答の和



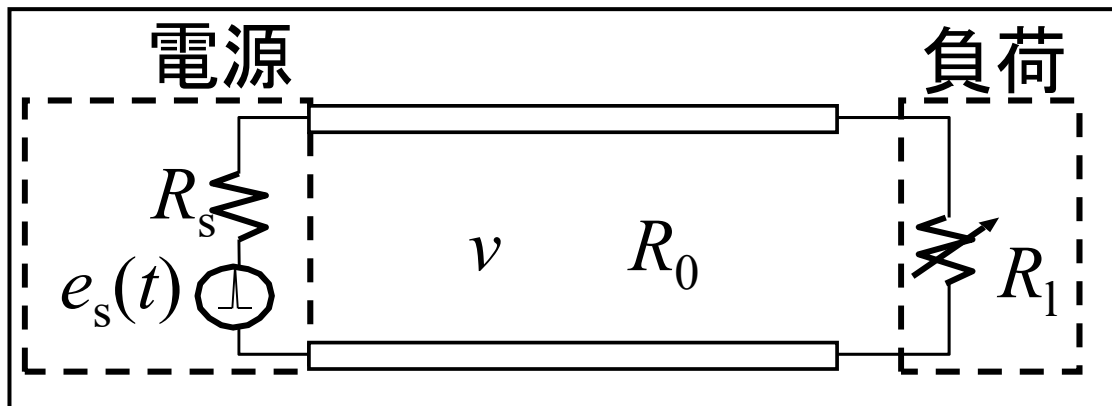
$$\Gamma_1 = \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0}$$

$$\Gamma_s = \frac{R_s - R_0}{R_s + R_0}$$

1. 右方向へ信号伝搬[伝送信号: $e_s(t)R_0/(R_s+R_0)$]
2. 左方向へ信号伝搬[伝送信号: $\Gamma_1 e_s(t)R_0/(R_s+R_0)$]
3. 右方向へ信号伝搬[伝送信号: $\Gamma_s \Gamma_1 e_s(t)R_0/(R_s+R_0)$]
4. 左方向へ信号伝搬[伝送信号: $\Gamma_s \Gamma_1^2 e_s(t)R_0/(R_s+R_0)$]
5. 以下同様

$\Gamma_L=0$ の時出力最大(反射するほど出力電力少)

$\Gamma_s=0$ の時出力最大(伝送線路へのパワー注入最大)



$$\Gamma_1 = \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0}$$

$$\Gamma_s = \frac{R_s - R_0}{R_s + R_0}$$

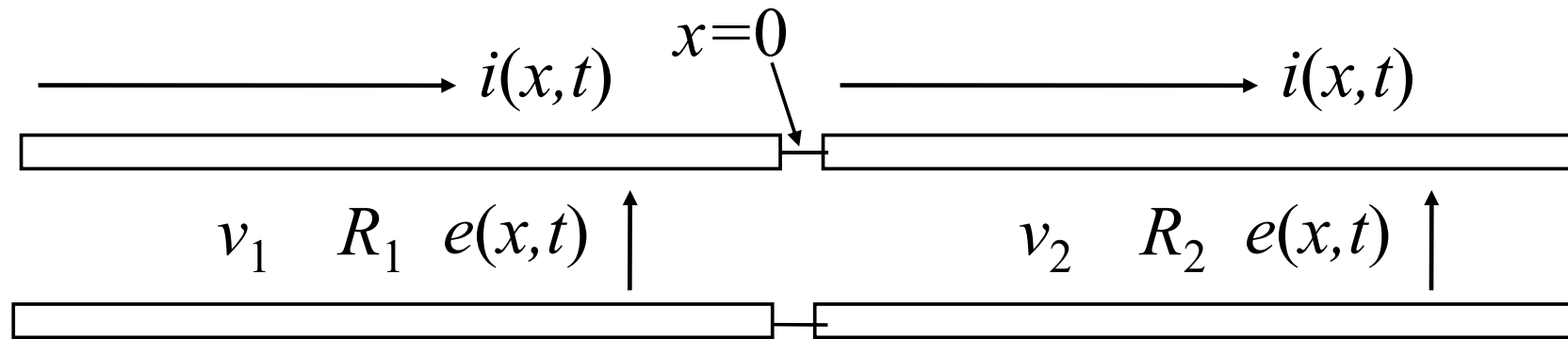
直流電源の場合、定常状態では

$$\frac{R_0}{R_s + R_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_s)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_1 (\Gamma_1 \Gamma_s)^n \right] = \frac{R_1}{R_s + R_1}$$

$\Gamma_1=0$ の時出力最大(反射するほど出力電力少)

$\Gamma_s=0$ の時出力最大(伝送線路へのパワー注入最大)

電圧透過係数 T 右端からの反射がない場合



電圧の連続 $e_{1+}(t) + e_{1-}(t) = e_{2+}(t)$

電流の連続 $R_1^{-1}[e_{1+}(t) - e_{1-}(t)] = R_2^{-1}e_{2+}(t)$



$$\Gamma = \frac{e_{1-}(t)}{e_{1+}(t)} = \frac{R_1^{-1} - R_2^{-1}}{R_1^{-1} + R_2^{-1}} = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$$

右端から反射がない場合、
抵抗との置き換えと等価

$$T = \frac{e_{2+}(t)}{e_{1+}(t)} = \frac{2R_1^{-1}}{R_1^{-1} + R_2^{-1}} = \frac{2R_2}{R_2 + R_1}$$

$T > 1$ となり得る！？

電流反射係数 Γ_i 、電流透過係数 T_i

$e_{n\pm} = \pm R_n i_{n\pm}$ であるから

$$\Gamma_i = \frac{i_{1-}(t)}{i_{1+}(t)} = -\frac{R_1^{-1}e_{1-}(t)}{R_1^{-1}e_{1+}(t)} = -\Gamma \quad T_i = \frac{i_{2+}(t)}{i_{1+}(t)} = \frac{R_2^{-1}e_{2+}(t)}{R_1^{-1}e_{1+}(t)} = \frac{R_1}{R_2} T$$



反射パワー $-e_{1-}(t)i_{1-}(t) = -\Gamma\Gamma_i e_{1+}(t)i_{1+}(t) = \Gamma^2 e_{1+}(t)i_{1+}(t)$

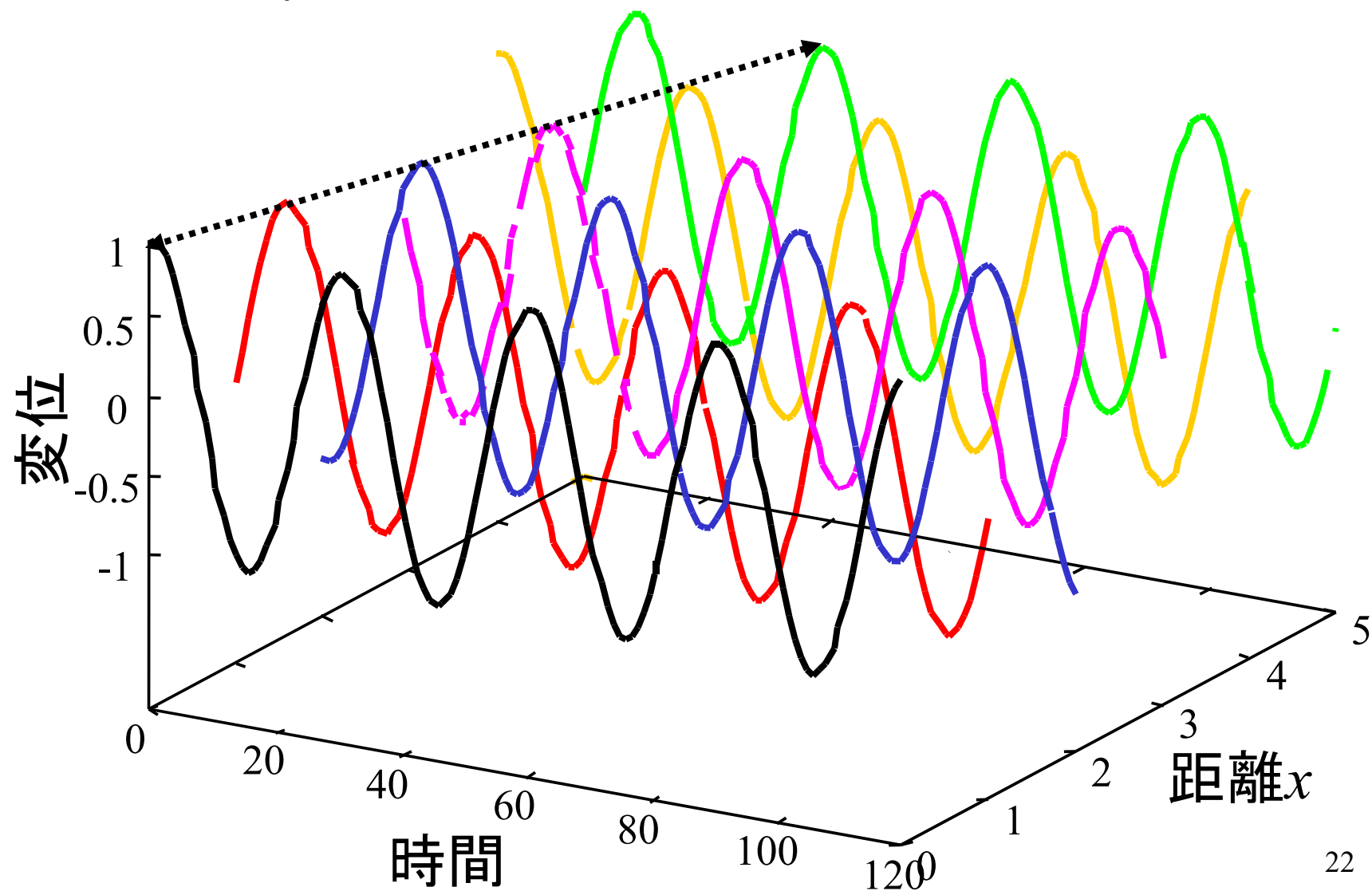
透過パワー $e_{2+}(t)i_{2+}(t) = TT_i e_{1+}(t)i_{1+}(t) = \frac{R_1}{R_2} T^2 e_{1+}(t)i_{1+}(t)$

無損失の場合、入射パワー＝反射パワー＋透過パワー

$$-\Gamma\Gamma_i + TT_i = 1 \quad \Gamma^2 + \frac{R_1}{R_2} T^2 = 1$$

正弦波の伝播

$$u = u_0 \cos \{2\pi f (t - x/v)\}$$



電信方程式

無損失近似

$$\begin{aligned} -\frac{\partial e}{\partial x} &= L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial e}{\partial t} \end{aligned}$$

定常状態

$$\begin{aligned} -\frac{\partial e}{\partial x} &= j\omega Li \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= j\omega Ce \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e(x)}{\partial x^2} &= -\beta^2 e(x) \\ \frac{\partial^2 i(x)}{\partial x^2} &= -\beta^2 i(x) \end{aligned}$$

時間因子 $\exp(j\omega t)$ を仮定

ω :角周波数(単位時間当たりの位相進み)

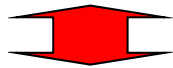
$\beta=\omega/v$:波数(位相定数、単位長当たりの位相遅れ)

$v=(LC)^{-0.5}$:伝送線路内での位相速度

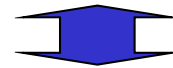
一般解

$$e(x,t) = [A_+ \exp(-j\beta x) + A_- \exp(+j\beta x)] \exp(j\omega t)$$

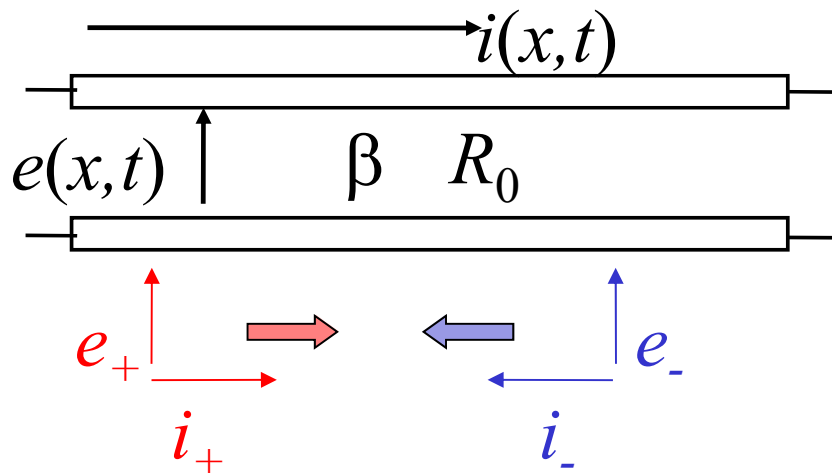
$$i(x,t) = R_0^{-1} [A_+ \exp(-j\beta x) - A_- \exp(+j\beta x)] \exp(j\omega t)$$



+x方向への進行波



-x方向への進行波



A_+ : +x方向への進行波の電圧

A_- : -x方向への進行波の電圧

$R_0 = (L/C)^{0.5}$: 特性インピーダンス
(進行波の電圧と電流の比)

$$R_0 = e_+/i_+ = e_-/i_-$$

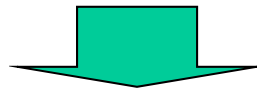
進行方向により電流の方向(極性)が反転することに注意！

F行列表示

$$\begin{bmatrix} e(0) \\ i(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta x) & jR_0 \sin(\beta x) \\ jR_0^{-1} \sin(\beta x) & \cos(\beta x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(x) \\ i(x) \end{bmatrix}$$

固有値: $\lambda = \exp(\pm j\beta x)$ 固有ベクトル: $\begin{bmatrix} R_0 & -R_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta x) & jR_0 \sin(\beta x) \\ jR_0^{-1} \sin(\beta x) & \cos(\beta x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & -R_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(+j\beta x) & \\ & \exp(-j\beta x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 & -R_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$



$$\begin{bmatrix} R_0 & -R_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e(x) \\ i(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-j\beta x) & \\ & \exp(+j\beta x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 & -R_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e(0) \\ i(0) \end{bmatrix}$$

直交モードへの変換

$$e(0), i(0) \Rightarrow \\ a(0), b(0)$$

波動の伝搬

直交モードへの変換

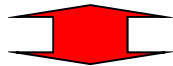
$$e(x), i(x) \Rightarrow \\ a(x), b(x)$$

R, G がある場合、 $\partial/\partial t=j\omega$ とすると

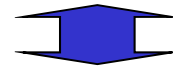
$$\begin{aligned} -\frac{\partial e}{\partial x} &= L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial e}{\partial t} + Ge \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} -\frac{\partial e}{\partial x} &= (j\omega L + R)i \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= (j\omega C + G)e \end{aligned}$$

$$e(x,t) = [A_+ \exp(-kx) + A_- \exp(+kx)] \exp(j\omega t)$$

$$i(x,t) = Z_0^{-1} [A_+ \exp(-kx) - A_- \exp(+kx)] \exp(j\omega t)$$



+x方向への進行波



-x方向への進行波

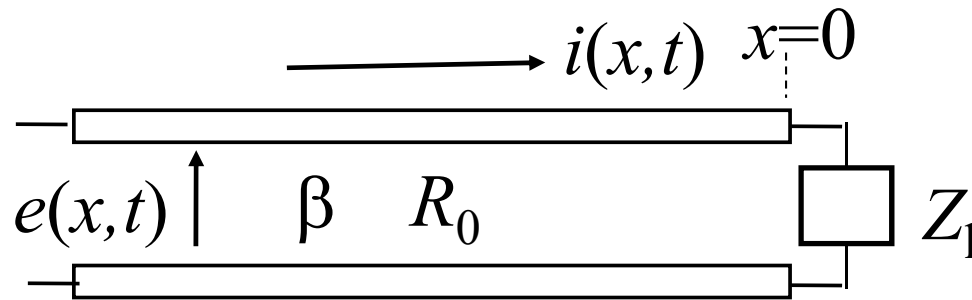
$$k = \sqrt{(j\omega L + R)(j\omega C + G)}$$

: 伝搬定数 (α : 減衰係数)

$$Z_0 = \sqrt{(j\omega L + R)/(j\omega C + G)}$$

: 特性インピーダンス

負荷 Z を接続した場合



$e(0,t) = Z_1 i(0,t)$ であるから $(x=0$ での) 電圧反射係数 Γ_1

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{A_-}{A_+} = \frac{Z_1 - R_0}{Z_1 + R_0}$$

伝送線路内での界分布

$$e(x,t) = A_+ [1 + \Gamma \exp(+2j\beta x)] \exp(j\omega t - j\beta x)$$

$$i(x,t) = R_0^{-1} A_+ [1 - \Gamma \exp(+2j\beta x)] \exp(j\omega t - j\beta x)$$

振幅の x 依存性は時間に依らず $\Rightarrow$ 定在波 (Standing Wave)

伝送線路内での界分布

$$|e(x)| = |e_+| |1 + \Gamma \exp(+2j\beta x)|$$

$$|i(x)| = R_0^{-1} |e_+| |1 - \Gamma \exp(+2j\beta x)|$$

$$|e(x)| \text{ の最大値 } e_{\max} = |e_+| (1 + |\Gamma|) \quad @ \angle \Gamma + 2\beta x = 2n\pi$$

$$|e(x)| \text{ の最小値 } e_{\min} = |e_+| (1 - |\Gamma|) \quad @ \angle \Gamma + 2\beta x = (2n+1)\pi$$

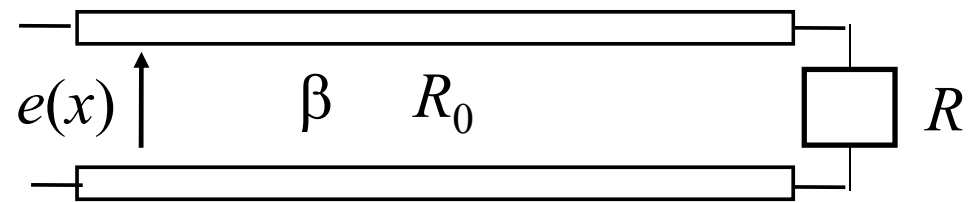
$$|i(x)| \text{ の最大値 } i_{\max} = R_0^{-1} |e_+| (1 + |\Gamma|) \quad @ \angle \Gamma + 2\beta x = (2n+1)\pi$$

$$|i(x)| \text{ の最小値 } i_{\min} = R_0^{-1} |e_+| (1 - |\Gamma|) \quad @ \angle \Gamma + 2\beta x = 2n\pi$$

電圧定在波比 VSWR (*Voltage Standing Wave Ratio*)

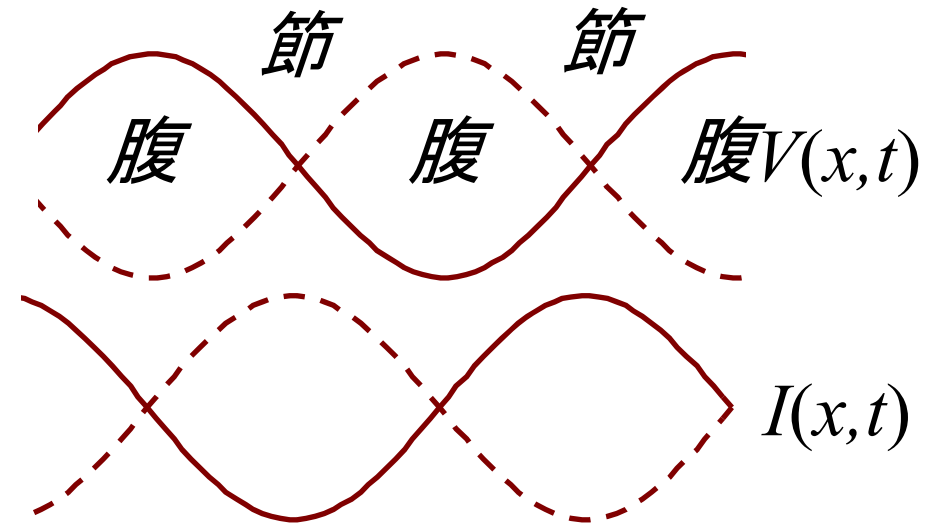
$$\text{VSWR} = \frac{e_{\max}}{e_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

極端な場合



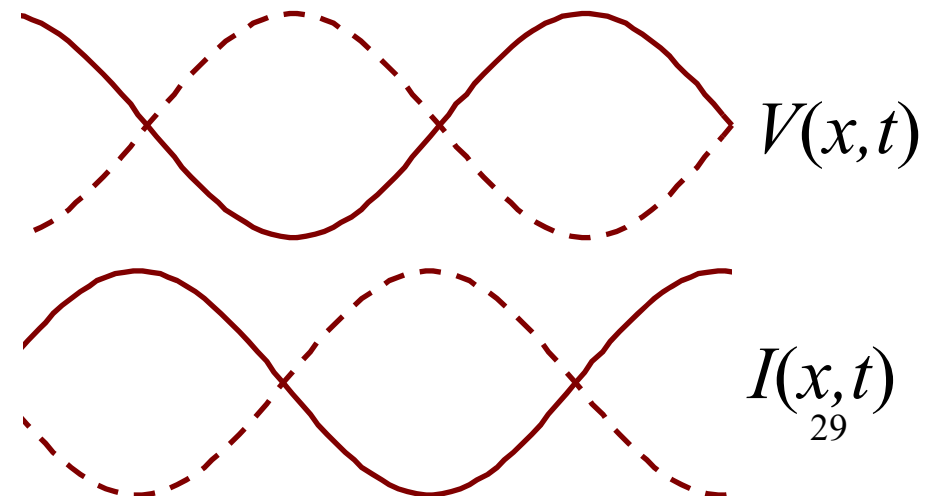
(1) 負荷が開放($R=\infty$)の場合

$$\Gamma = 1$$



(2) 負荷が短絡($R=0$)の場合

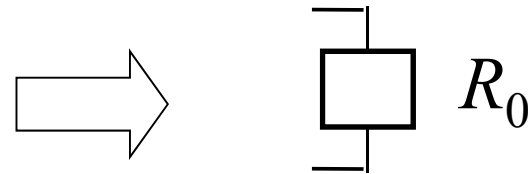
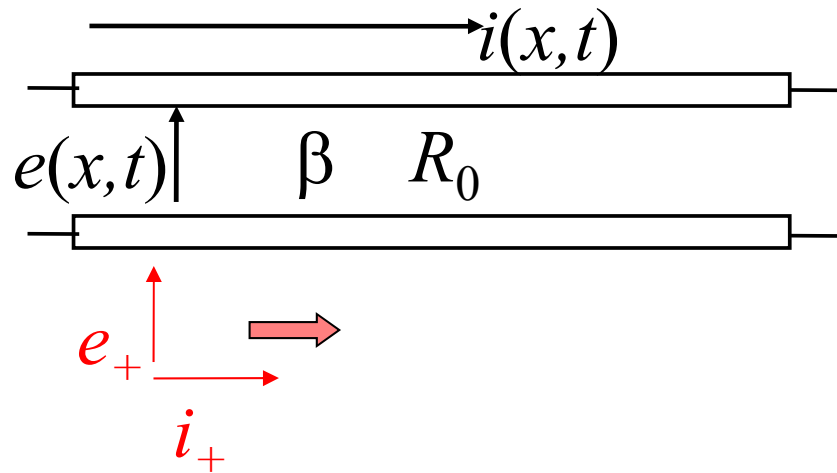
$$\Gamma = -1$$



反射が無ければ(無限に長ければ)

~~$$e(x) = [e_+ \exp(-j\beta x) + e_- \exp(+j\beta x)] \exp(j\omega t)$$~~

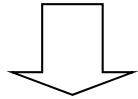
~~$$i(x) = R_0^{-1} [e_+ \exp(-j\beta x) - e_- \exp(+j\beta x)] \exp(j\omega t)$$~~



特性インピーダンス
の負荷と等価

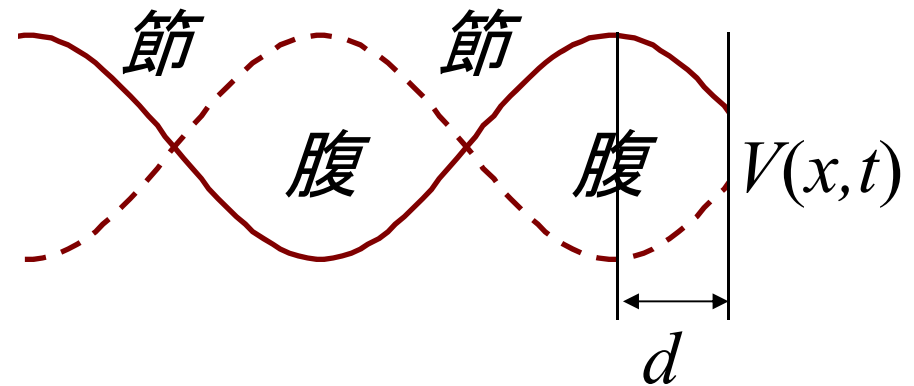
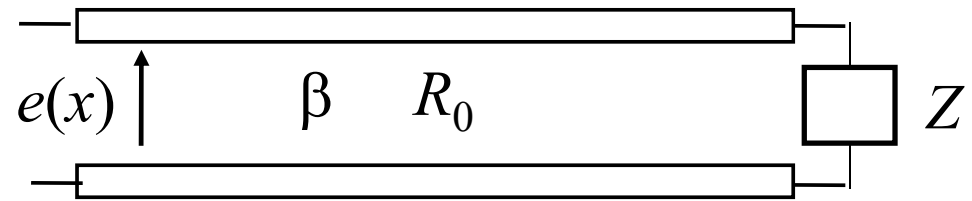
d : 腹までの距離

$$2\beta d = \angle \Gamma$$



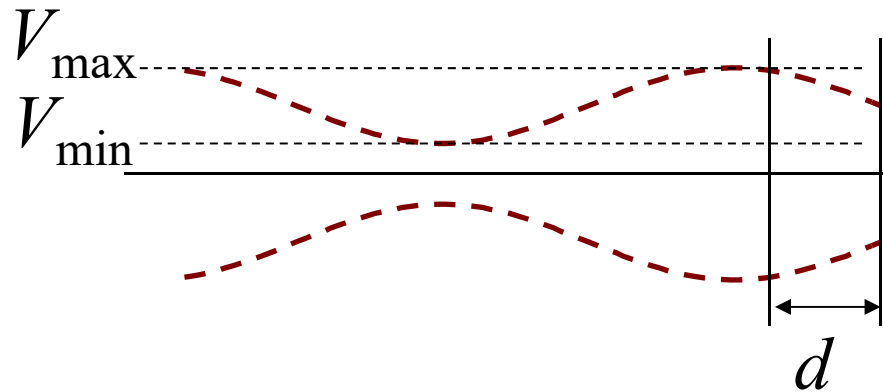
$$d/\lambda = (\angle \Gamma / 2\pi) / 2$$

(a) $|\Gamma| = 1$ の場合

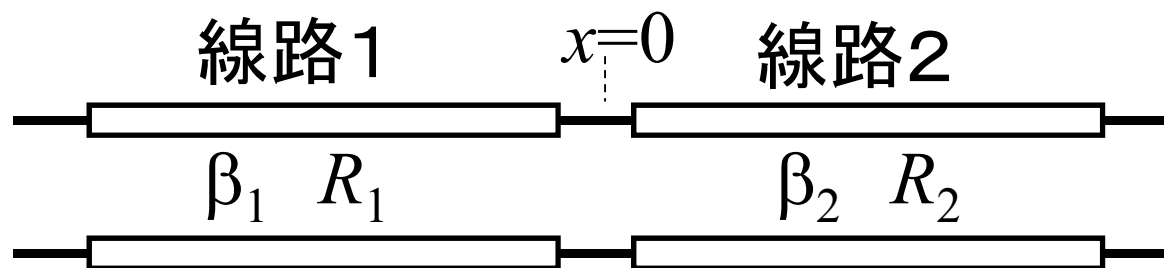


(b) $|\Gamma| \neq 1$ の場合

$$|\Gamma| = \frac{\text{VSWR} - 1}{\text{VSWR} + 1}$$



境界での反射



線路1中では

$$\begin{cases} V(x) = V_+^{(1)} \exp(-j\beta_1 x) + V_-^{(1)} \exp(+j\beta_1 x) \\ I(x) = R_1^{-1} [V_+^{(1)} \exp(-j\beta_1 x) - V_-^{(1)} \exp(+j\beta_1 x)] \end{cases}$$

線路2中では

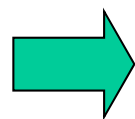
$$\begin{cases} V(x) = V_+^{(2)} \exp(-j\beta_2 x) + \cancel{V_-^{(2)} \exp(+j\beta_2 x)} \\ I(x) = R_2^{-1} [V_+^{(2)} \exp(-j\beta_2 x) - \cancel{V_-^{(2)} \exp(+j\beta_2 x)}] \end{cases}$$

反射が無いから

境界($x=0$)で V, I が連続

$$V_+^{(2)} = V_+^{(1)} + V_-^{(1)}$$

$$R_2^{-1} V_+^{(2)} = R_1^{-1} [V_+^{(1)} - V_-^{(1)}]$$



電圧反射
係数

電圧透過
係数

$$\Gamma = \frac{V_-^{(1)}}{V_+^{(1)}} = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$$

$$T = \frac{V_+^{(2)}}{V_+^{(1)}} = \frac{2R_2}{R_2 + R_1}$$

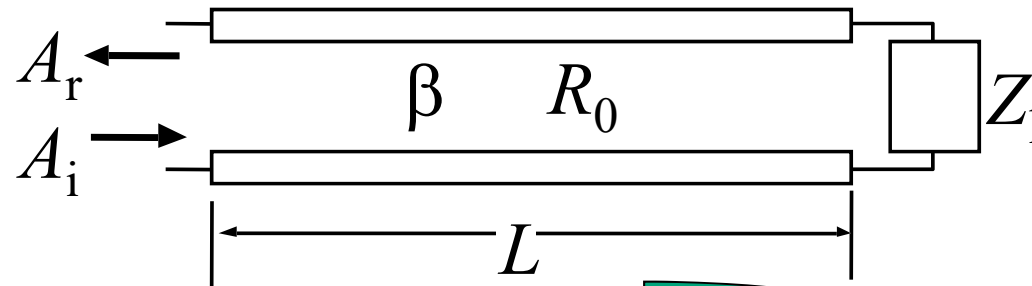
電圧透過係数は1より大きくなる！？

電力反射係数 $\Gamma_p = \frac{R_1^{-1} |V_-^{(1)}|^2}{R_1^{-1} |V_+^{(1)}|^2} = \frac{(R_1 - R_2)^2}{(R_1 + R_2)^2}$

電力透過係数 $T_p = \frac{R_2^{-1} |V_+^{(2)}|^2}{R_1^{-1} |V_+^{(1)}|^2} = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}$

パワー保存則 $\Gamma_p + T_p = 1$

入力から見込んだインピーダンス Z_e

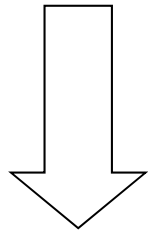


$$\Gamma = A_r / A_i$$

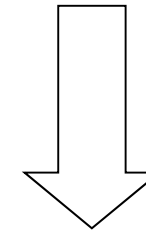
$$\Gamma_0$$

$$\Gamma = \Gamma_0 \exp(-2j\beta L)$$

$$Z_l = \frac{A_+ + A_-}{R_0^{-1}(A_+ - A_-)} = R_0 \frac{1 + \Gamma_0}{1 - \Gamma_0}$$



$$Z_e = R_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = R_0 \frac{Z_1 + jR_0 \tan(\beta L)}{jZ_1 \tan(\beta L) + R_0}$$



$$\Gamma_0 = \frac{A_-}{A_+} = \frac{Z_1 - R_0}{Z_1 + R_0}$$

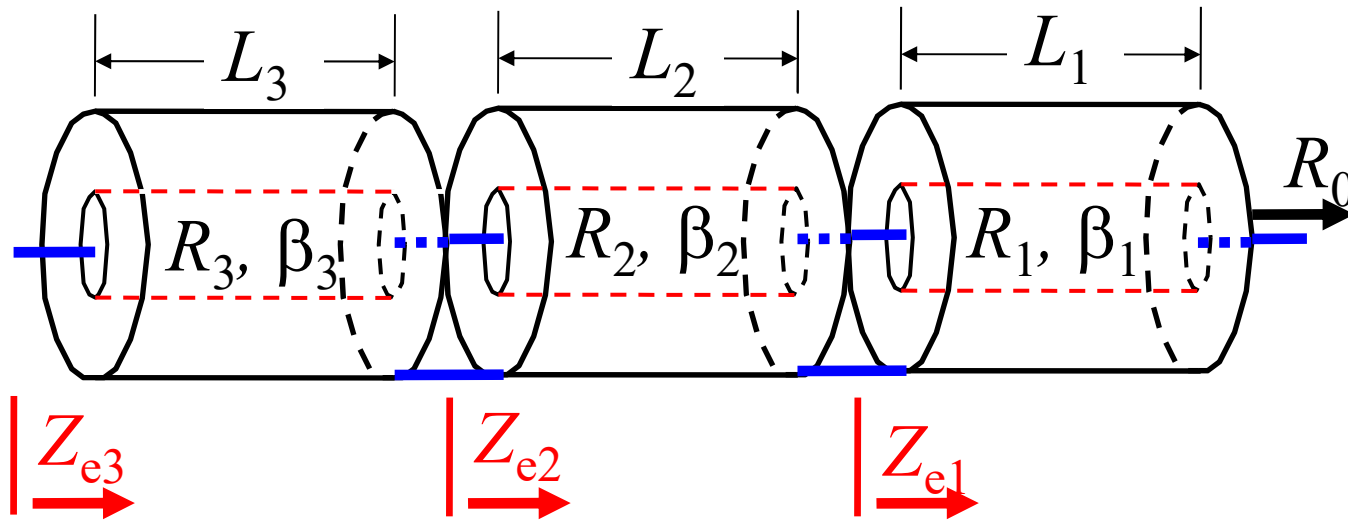
$$Z_e = R_0 \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = R_0 \frac{Z + jR_0 \tan(\beta L)}{jZ \tan(\beta L) + R_0}$$

$$Z = 0 \text{ の時 } Z_e = jR_0 \tan(\beta L)$$

$$Z = \infty \text{ の時 } Z_e = -jR_0 \cot(\beta L)$$

$$\beta L = \pi / 2 \text{ (} L = \lambda / 4 \text{) の時 } Z_e = \frac{R_0^2}{Z}$$

多段縦続の再帰的解析



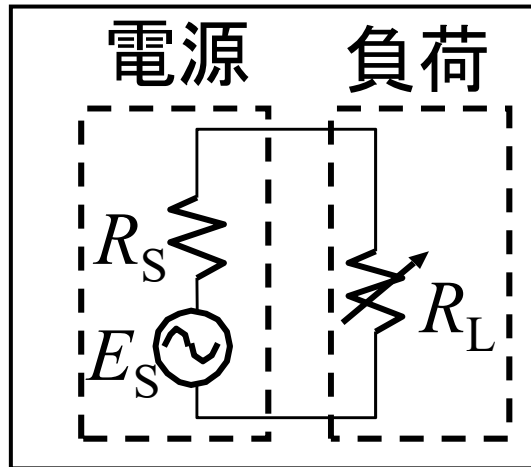
$$Z_{en} = R_n \frac{Z_{en-1} + jR_n \tan(\beta_n L_n)}{R_n + jZ_{en-1} \tan(\beta_n L_n)}$$

$\beta L = \pi/2$ ($L = \lambda/4$)の時

$$Z_{en} = \frac{R_n^2}{Z_{en-1}} \quad \text{高インピーダンスほど低インピーダンスに見える！}$$

インピーダンス整合

最大電力伝送の為に $R_L = R_S$

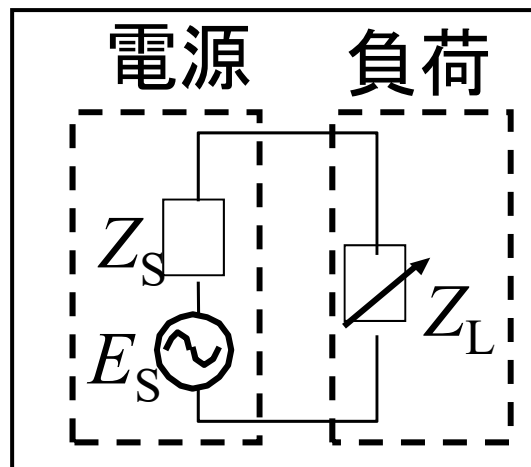


$$P_L = \frac{R_L |E_S|^2}{2(R_S + R_L)^2} \quad e_L = \frac{R_L E_S}{R_S + R_L}$$

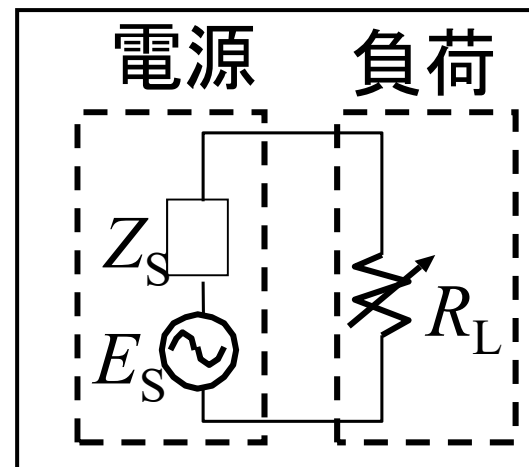
$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{(R_S - R_L) |E_S|^2}{2(R_S + R_L)^3} = 0 \quad \text{である故}$$

最大出力の条件では $e_L = \frac{E_S}{2}$

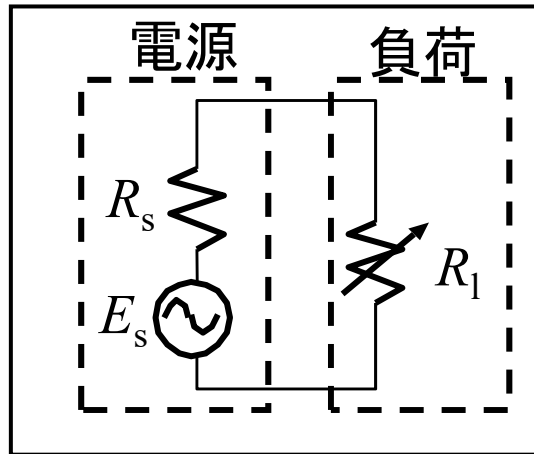
この場合 $Z_L = Z_S^*$



この場合 $R_L = |Z_S|$



最大電力伝送の為に $R_L = R_S$

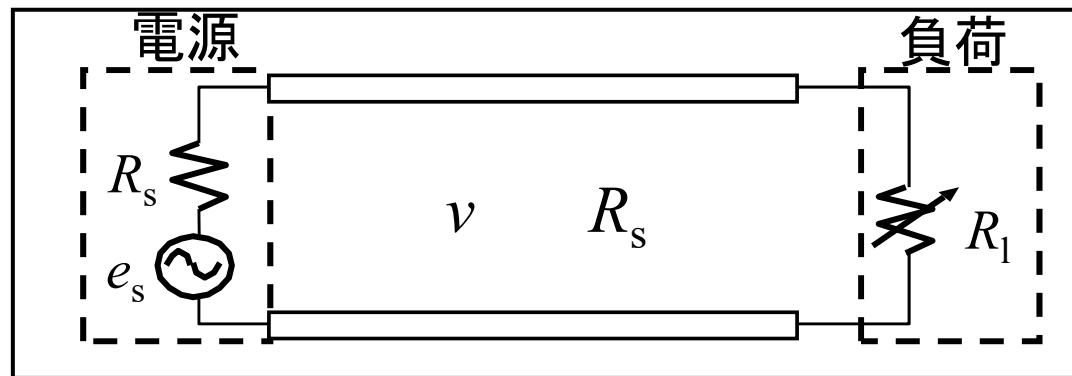


$$P_1 = \frac{R_1 |E_s|^2}{2(R_s + R_1)^2} \quad e_L = \frac{R_1 E_s}{R_s + R_1}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial R_1} = \frac{(R_s - R_1) |E_s|^2}{2(R_s + R_1)^3} = 0 \quad \text{である故}$$

最大出力の条件では $e_1 = \frac{e_s}{2}$

時系列的解析



$$\Gamma = \frac{R_L - R_s}{R_L + R_s}$$

(1) $e_+(0) = \frac{E_s}{2}$
当初は $L = \infty$ と等価

(2) $e_+(L)\Gamma_0$

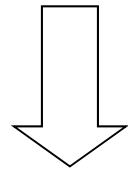
(3) $e_+(L) + e_-(L) = e_+(L)(1 + \Gamma)$

$\Gamma_0 = 0$ の時出力最大

規格化振幅

$$a(x) = \frac{e_+ \exp(-j\beta x)}{\sqrt{2R_0}} = \frac{[e(x) + R_0 i(x)]}{2\sqrt{2R_0}}$$

$$b(x) = \frac{e_- \exp(+j\beta x)}{\sqrt{2R_0}} = \frac{[e(x) - R_0 i(x)]}{2\sqrt{2R_0}}$$

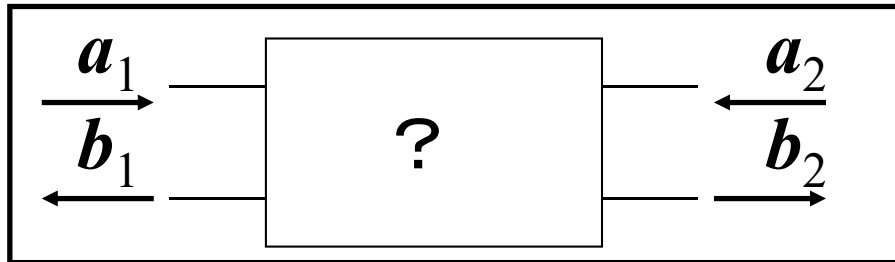


電信方程式に代入

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a(x)}{\partial x} &= -j\beta a(x) \\ \frac{\partial b(x)}{\partial x} &= +j\beta b(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{直交モード方程式} \\ (a \text{ と } b \text{ は独立に伝搬する}) \end{array}$$

単位長当たりの変化率が純
虚数の場合、波動の伝搬

散乱係数



$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

a_m : 入射波の規格化振幅

線形可逆受動回路では $S_{ji} = S_{ij}$

b_m : 反射波の規格化振幅

規格化振幅 : $|a_m|^2$ が電力に相当、位相は同一

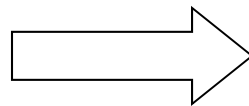
単位: dBm (mW)

S_{21} : 透過係数

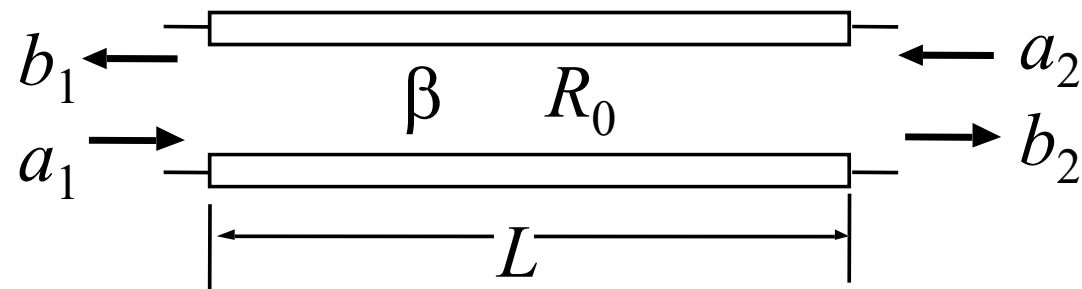
挿入損失: $-20\log_{10}|S_{21}|$

S_{11} : 反射係数

反射損失: $-20\log_{10}|S_{11}|$



無損失伝送線路の散乱行列表示

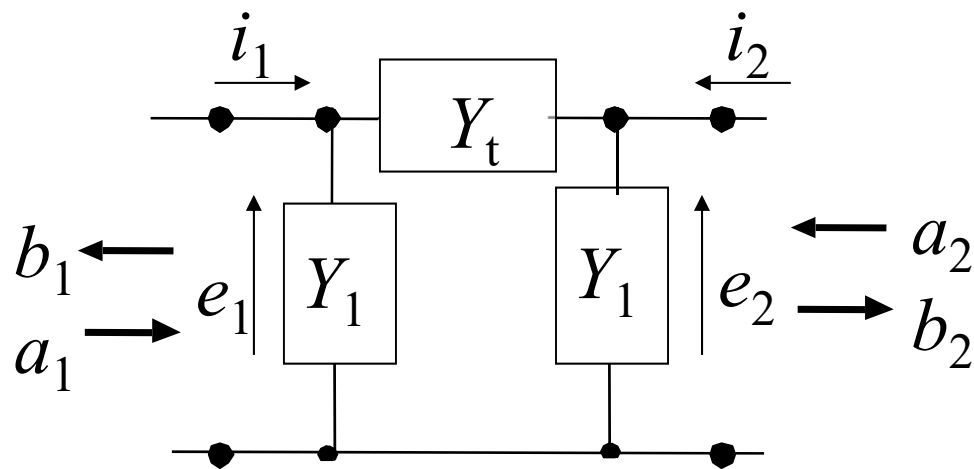


$$b_1 = a_2 \exp(-j\beta L)$$

$$b_2 = a_1 \exp(-j\beta L)$$

➡
$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \exp(-j\beta L) \\ \exp(-j\beta L) & 0 \end{pmatrix}$$

π 型回路の散乱行列表示



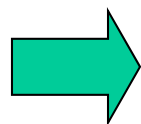
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$Y_{11} = Y_1 + Y_t$$

$$Y_{12} = -Y_t$$

$$a_m = \frac{e_m + R_0 i_m}{2\sqrt{2R_0}}$$

$$b_m = \frac{e_m - R_0 i_m}{2\sqrt{2R_0}}$$



$$e_m = \sqrt{2R_0} (a_m + b_m)$$

$$i_m = \sqrt{2/R_0} (a_m - b_m)$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = R_0 \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{11} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{11} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - R_0 \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{11} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{→} \end{matrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + R_0 Y_{11} & R_0 Y_{12} \\ R_0 Y_{12} & 1 + R_0 Y_{11} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - R_0 Y_{11} & -R_0 Y_{12} \\ -R_0 Y_{12} & 1 - R_0 Y_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

従って

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} \end{pmatrix} &= D^{-1} \begin{pmatrix} 1 + R_0 Y_{11} & -R_0 Y_{12} \\ -R_0 Y_{12} & 1 + R_0 Y_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - R_0 Y_{11} & -R_0 Y_{12} \\ -R_0 Y_{12} & 1 - R_0 Y_{11} \end{pmatrix} \\ &= D^{-1} \begin{pmatrix} 1 - (R_0 Y_{11})^2 + (R_0 Y_{12})^2 & -2R_0 Y_{12} \\ -2R_0 Y_{12} & 1 - (R_0 Y_{11})^2 + (R_0 Y_{12})^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで $D = (1 + R_0 Y_{11})^2 - (R_0 Y_{12})^2$

無損失(Unitary)条件

$$\sum_m |b_m|^2 = \sum_m |a_m|^2$$

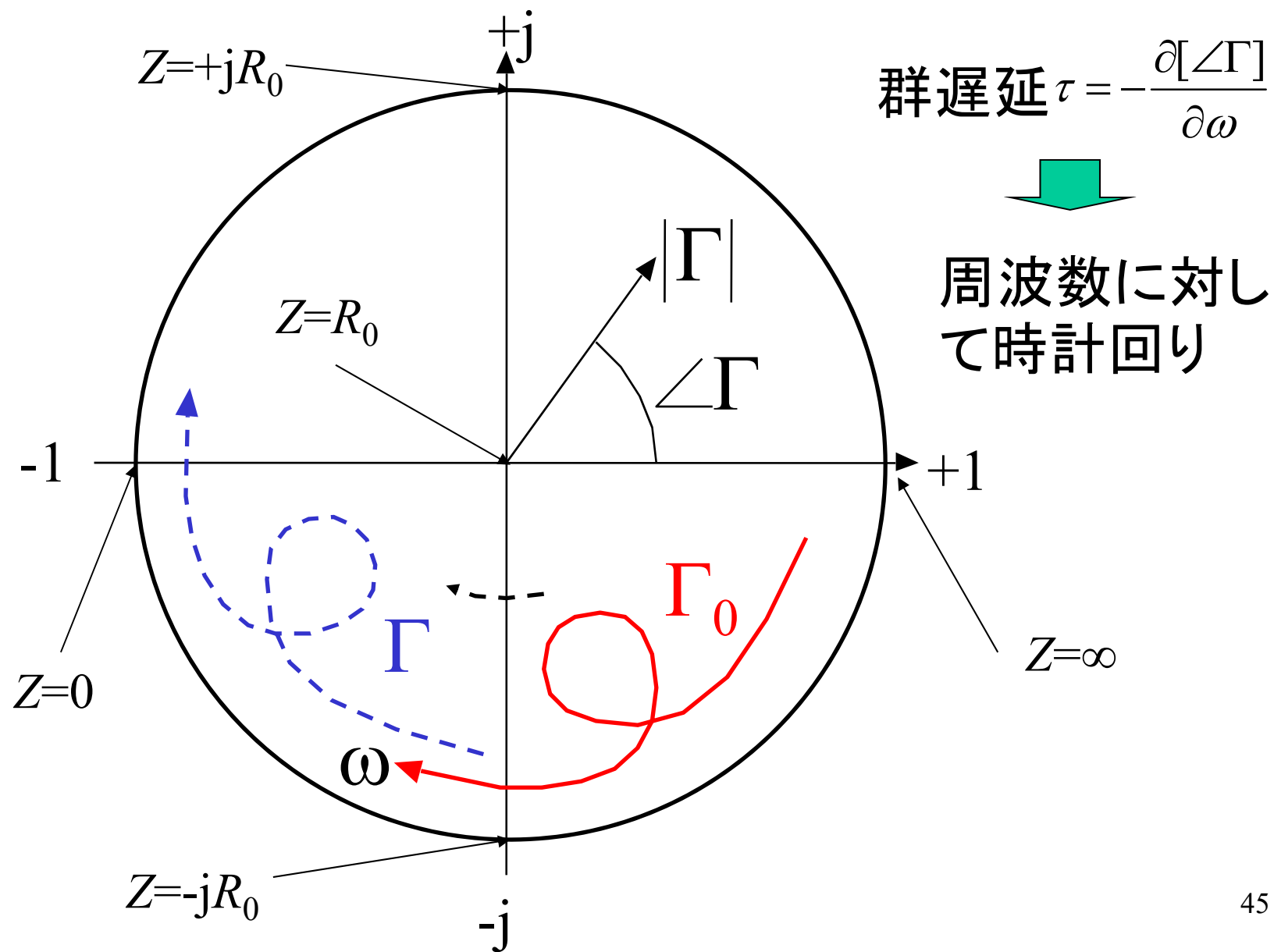
$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \\ S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* = 0 \end{cases}$$

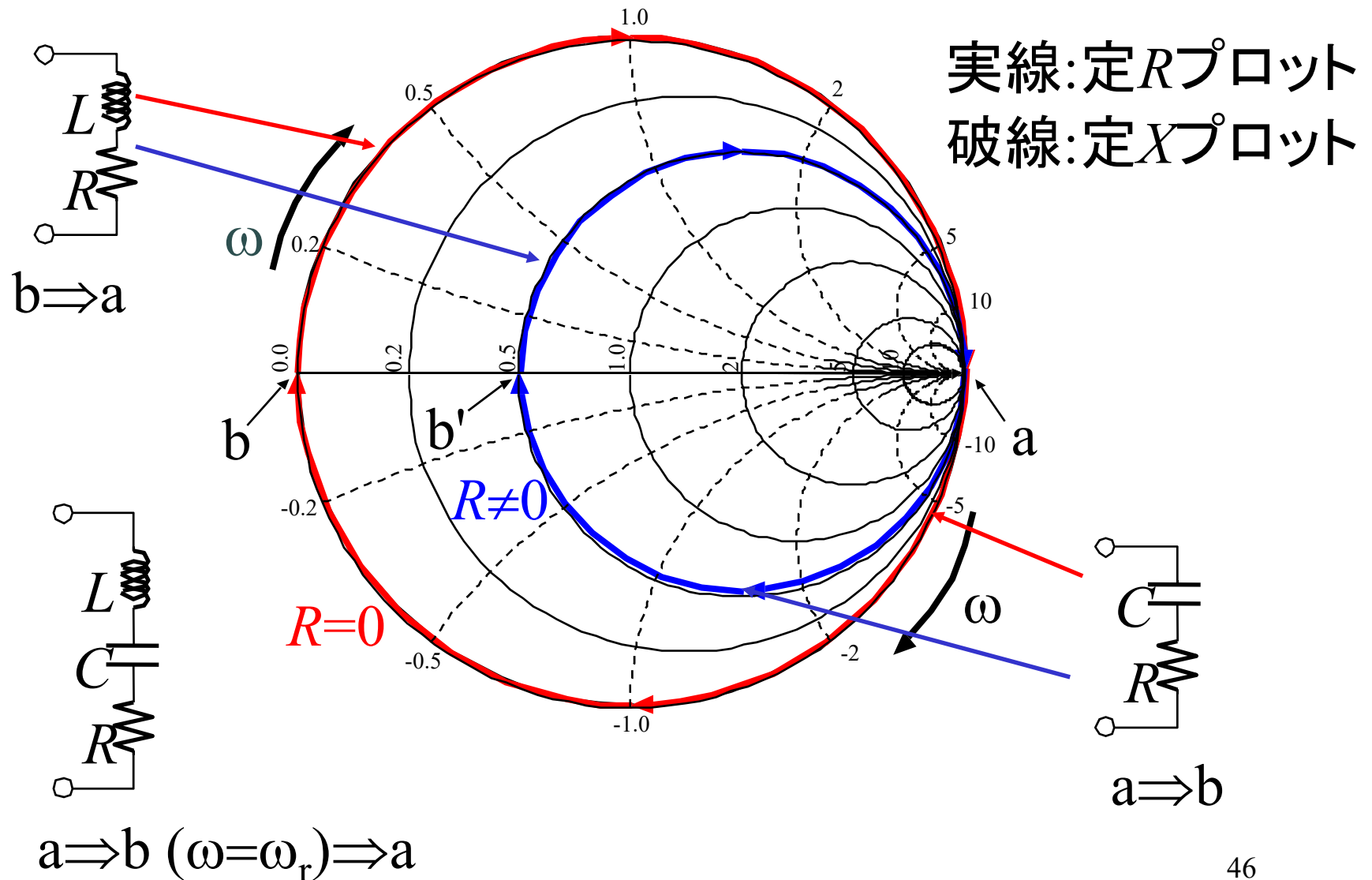
ユニタリ行列: $S^{-1} = S^{t*}$ (固有値の絶対値が全て1)

$\left. \begin{array}{l} 1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2 \\ 1 - |S_{22}|^2 - |S_{12}|^2 \end{array} \right\}$
 入射エネルギーと
散逸エネルギー
の比

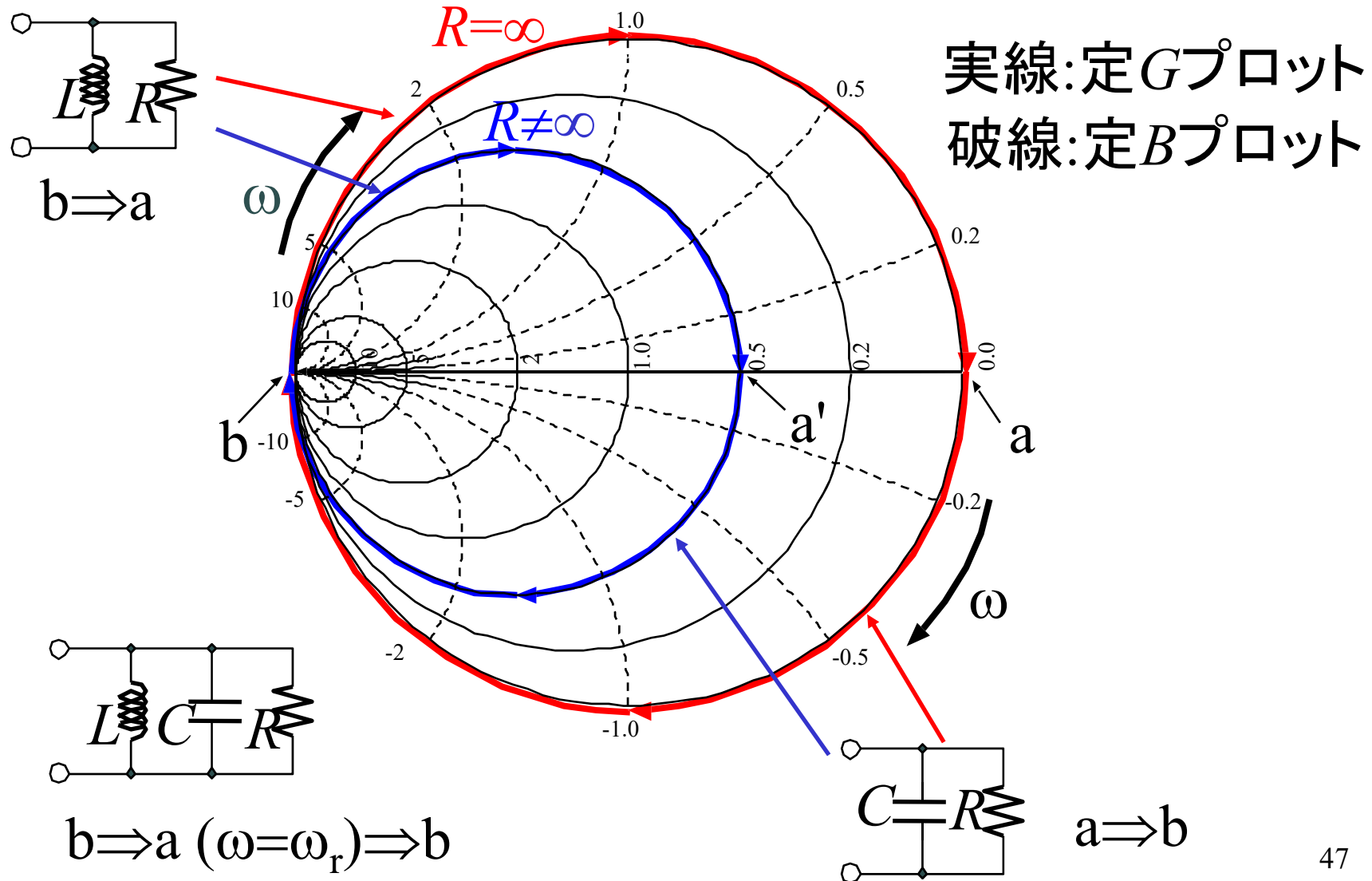
周波数による Γ の変化



スミスチャート(インピーダンス)



スミスチャート(アドミタンス)



インピーダンス整合回路

イミタンス
チャート

並列チューニング

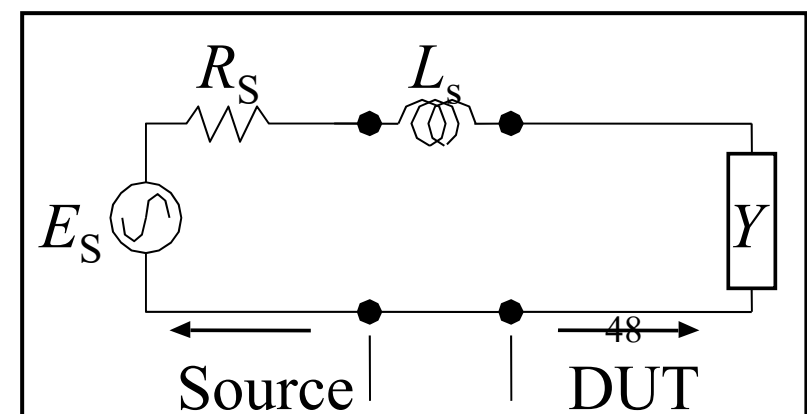
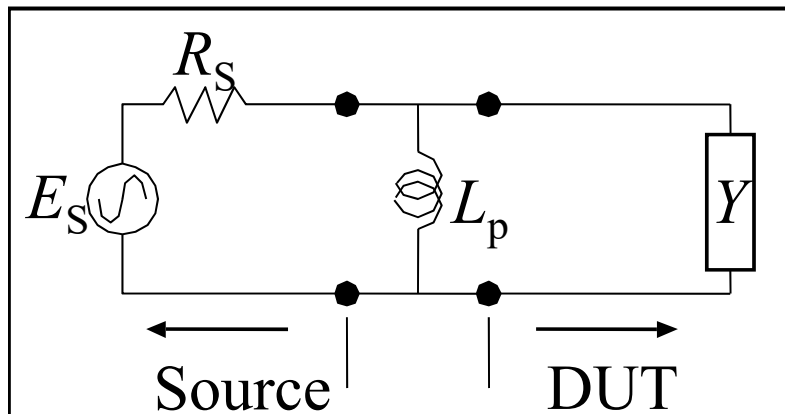
$$R_s = \text{Re}[Y]^{-1}$$

$$\omega L_p = -\text{Im}[Y]^{-1}$$

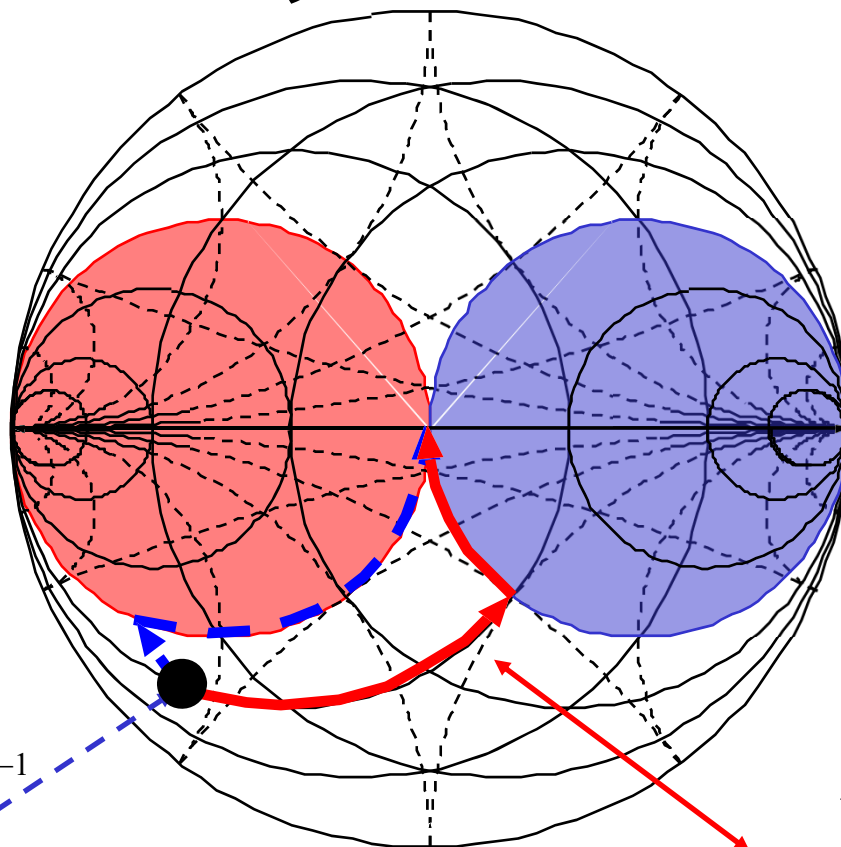
直列チューニング

$$R_s = \text{Re}[Y^{-1}]$$

$$\omega L_s = -\text{Im}[Y^{-1}]$$

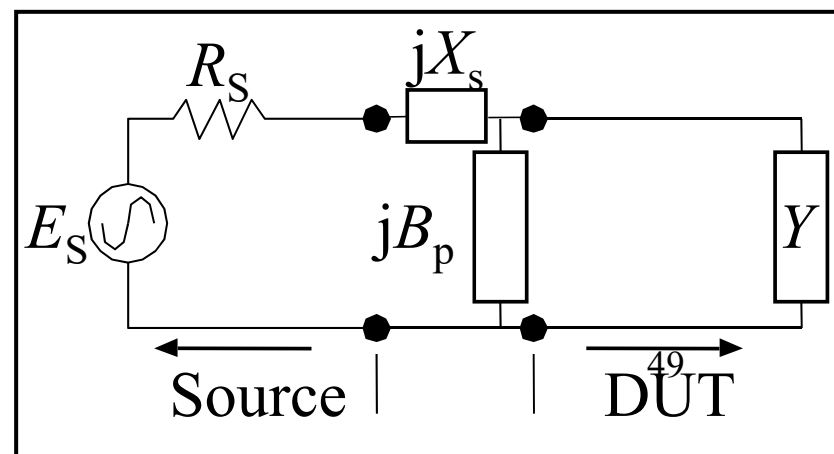
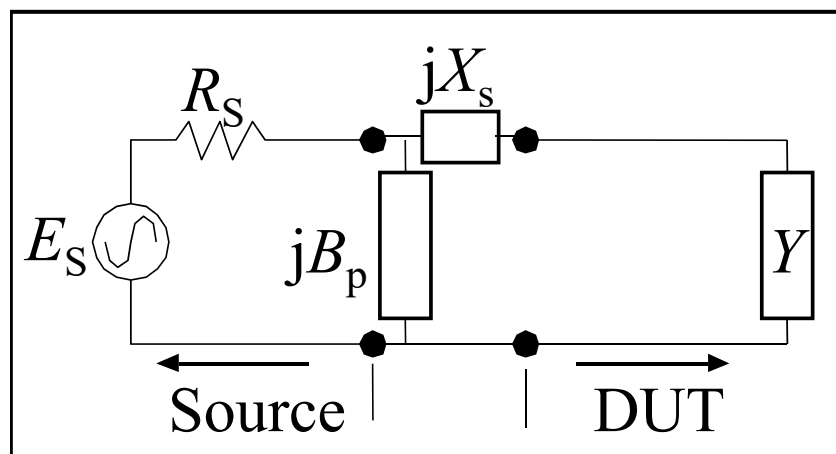


直並列チューニング



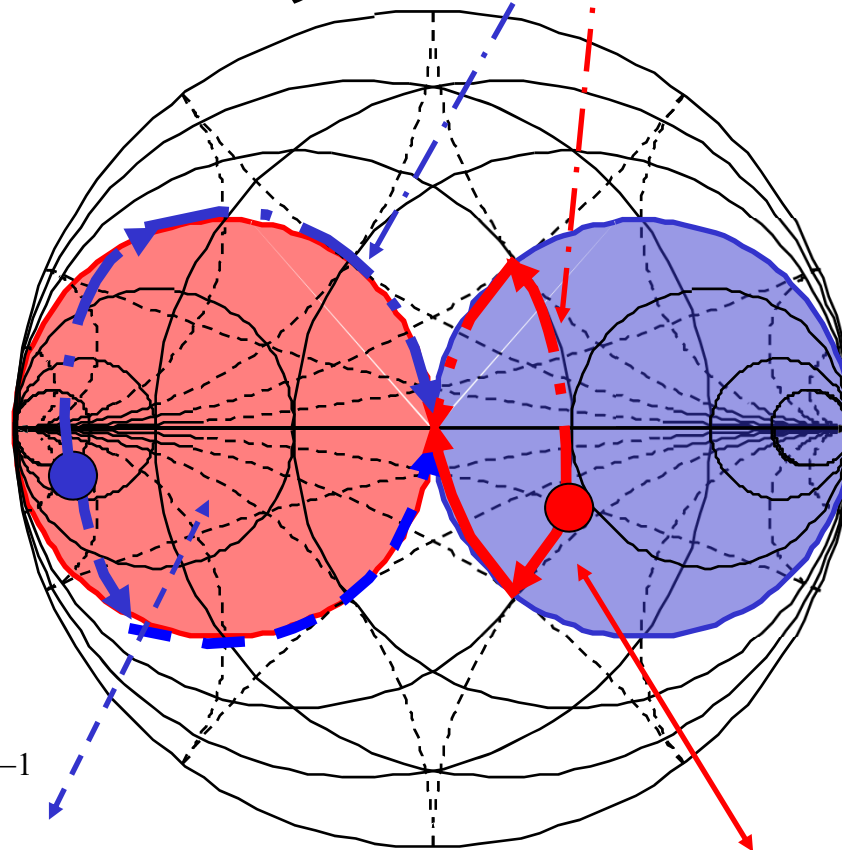
$$Y^{-1} + jX_s = (R_s^{-1} - jB_p)^{-1}$$

$$Y + jB_p = (R_s - jX_s)^{-1}$$



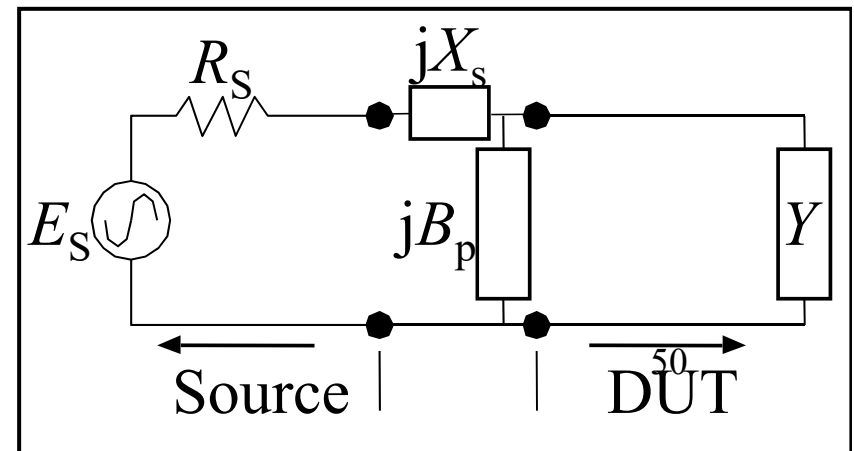
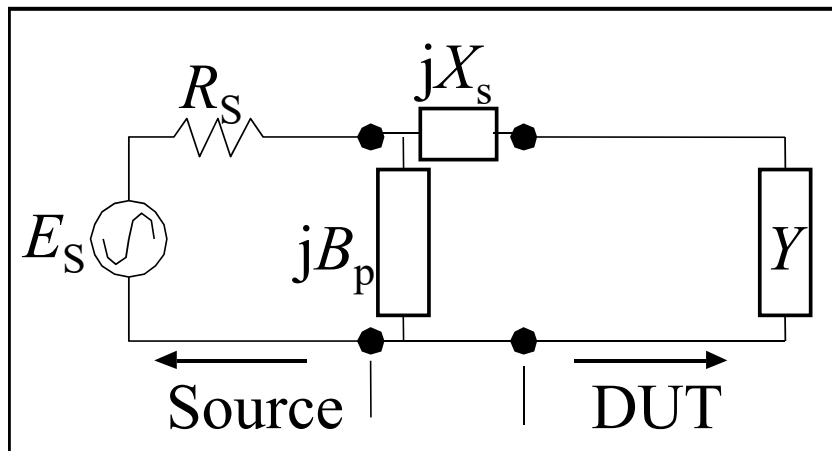
直並列チューニング

原理的には可能



$$Y^{-1} + jX_s = (R_s^{-1} - jB_p)^{-1}$$

$$Y + jB_p = (R_s - jX_s)^{-1}$$



伝送線路の集中 定数等価回路

半セクションで見れば、
理想トランスと等価

