

第6章 均質媒質中での電磁波

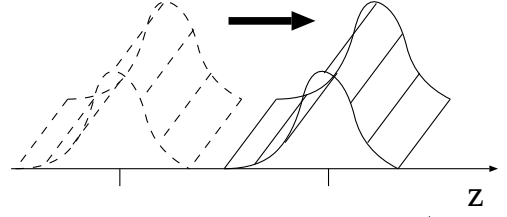


図 6.1: 平面波の伝搬

6.1 等方性媒体中での電磁波

$\mathbf{D} = \mu\mathbf{H}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ とした場合、マクスウェル方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (6.4)$$

で与えられる。但し、 ρ 及び $\mathbf{J}$ を零とした。

式 (6.1) の両辺の回転を取り、式 (6.2) を代入すれば、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.5)$$

を得る。ベクトル恒等式 (1.62)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

と式 (6.3) を利用すれば、

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.6)$$

を得る。静電界の場合、 $\nabla^2 \mathbf{E} = 0$ であるから、式 (6.6) の右边が変位電流の存在により生じた項であることがわかる。

変位電流の影響を考察するために、まず、平行平板キャパシタを考える。 $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ とし、 $\mathbf{E} \propto \exp(j\omega t)$ とすれば

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + C^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - C^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{E} = 0 \quad (6.7)$$

を得る。ここで、 $C = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ である。従って、この解は、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+(t - C^{-1}z) + \mathbf{E}_-(t + C^{-1}z) \quad (6.8)$$

と表現できる。ここで、 $\mathbf{E}_\pm(\tau)$ は任意の関数である。式 (6.8) の各項は、図 6.1 の様に、距離 z だけ離れた点に於て、時間 C だけ遅れてまたは進んで到達することを表す。即ち、各々 $\pm z$ 方向に速度 C で伝搬する波動 (電磁波 (electromagnetic wave) または光 (light)) である。この様に、距離によって振幅を変えず、伝搬して行く波を平面波 (plane wave) と言う。

点波源からの発散的な場を考えると、生じる $\mathbf{E}$ は球対称的な場となり、その場合 $\nabla^2 \mathbf{A} = r^{-1} \partial^2(r\mathbf{A})/\partial r^2$ であるから、式 (6.6) は

$$r^{-1} \frac{\partial^2(r\mathbf{E})}{\partial r^2} - C^{-2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = r^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial r} + C^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} - C^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) (r\mathbf{E}) = 0 \quad (6.9)$$

と変形され、この解は

$$\mathbf{E} = r^{-1} \{\mathbf{E}_+(t - C^{-1}r) + \mathbf{E}_-(t + C^{-1}r)\} \quad (6.10)$$

となる。式 (6.8)、(6.10) は、静電界、静磁界は、電磁界 (electromagnetic field) における時間遅れを無視したものに相当することがわかる。

6.2 平面波の性質

いま、場が正弦的に変化する平面波を考え、 $\mathbf{E}, \mathbf{H} \propto \exp(j\omega t)$ とする。この時、式 (6.8) は次式のように表現できる。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ \exp\{j(\omega t - kz)\} + \mathbf{E}_- \exp\{-j(\omega t + kz)\} \quad (6.11)$$

ここで、 $k = \omega/C$ は波数 (wavenumber) と呼ばれ、単位長さ当たりの位相 (phase) の変化で、波動の位相の進む遅さを与える。また、波長 (wavelength) λ は $\lambda = 2\pi/k$ で与えられる。

これを 3 次元に拡張すれば、 $\mathbf{x}$ 方向に伝搬する波動は

$$\mathbf{E} = A \exp\{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})\} \quad (6.12)$$

と表現できることは容易に推論できる。この時、 $\mathbf{k}$ は波数ベクトル (wave vector) と呼ばれ、その方向は平面波の進行方向 (propagation direction) を表現し、 $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ である。

式 (6.1)-(6.4) に式 (6.12) を代入すれば、

$$\mathbf{k} \times (\epsilon_0^{-1} \mathbf{D}) = \omega \mathbf{B} \quad (6.13)$$

$$\mathbf{k} \times (\mu^{-1} \mathbf{B}) = -\omega \mathbf{D} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (6.15)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.16)$$

を得る。即ち、図 6.2 の様に $\mathbf{k}$ 、 $\mathbf{D}$ と $\mathbf{B}$ は互いに直交し、この順で右手系の関係にあることがわかる。また、

$$|\mathbf{E}|/|\mathbf{H}| = \omega\mu/|\mathbf{k}| = \mu C = \sqrt{\mu/\epsilon} \equiv Z_e \quad (6.17)$$

と表現され、この z_e を電磁波の特性インピーダンス (characteristic impedance) という。

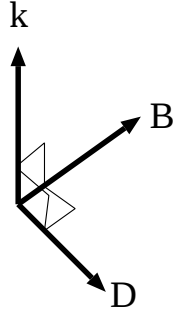


図 6.2: 等方性媒体における $\mathbf{k}$ と $\mathbf{D}$ と $\mathbf{B}$ の関係

系が導電率 κ を持つ場合、 $\mathbf{J} = \kappa\mathbf{E}$ であるから、式 (6.14) は

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\epsilon(1 - j\kappa/\omega\epsilon)\mathbf{E} \quad (6.18)$$

となる。これに式 (6.13)、(6.15) の関係を利用すれば、

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -|\mathbf{k}|^2 \mathbf{E} = -(\omega/C)^2(1 - j\kappa/\omega\epsilon)\mathbf{E} \quad (6.19)$$

を得る。従って、 $\psi = \tan^{-1}(\kappa/\omega\epsilon)$ とすれば

$$|\mathbf{k}| = (\omega/C) \cdot \sqrt{1 - j\kappa/\omega\epsilon} = (\omega/C) \exp(-j\psi/2) \quad (6.20)$$

となり、 $|\mathbf{k}|$ は複素数になる。一般に、 $\mathbf{k}$ の実部を伝搬定数 (propagation constant)、 $\mathbf{k}$ の虚部を減衰定数 (attenuation constant) と呼ぶ。伝搬方向を x とすれば、

$$\begin{aligned} E &= A \exp[j\omega\{t - C^{-1} \cos(\psi/2)x\}] \\ &\quad \times \exp\{-\omega C^{-1} \sin(\psi/2)x\} \end{aligned} \quad (6.21)$$

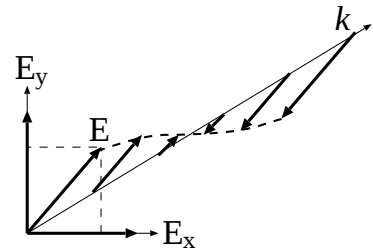
となるから、振幅が指数関数的に減衰する減衰振動波となることがわかる。

ところで、式 (6.20) から、 $\omega \gg \kappa/\epsilon$ ならば、伝搬媒体は誘電体として働き、 $\omega \ll \kappa/\epsilon$ ならば、伝搬媒体は導体として働くことがわかる。従って、同じ物体でも、扱う周波数によって電磁波の特性は大きく変化する。例えば、液晶等に用いられている透明電極はこの性質を利用したもので、 ω が極めて大きな光に対しては誘電体として働くため、光は通過するが、低周波の電気信号に対しては導電性を示す。導電体中では、電界が短絡されるため、電磁波は急速に減衰する。

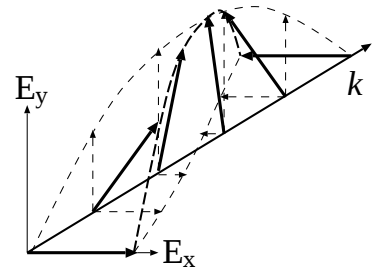
$\mathbf{E}$ の方向を偏波 (polarization) という。 $\mathbf{k}$ に垂直な $\mathbf{E}$ は、互いに直交する 2 つの成分に分けることができる。即ち、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad (6.22)$$

$\mathbf{E}_1$ と $\mathbf{E}_2$ は時間的に単振動するが、互いが同位相の場合、単一ベクトルを形成する (図 6.3a 参照)。これを線偏波 (linear polarization) という。一方、 $\mathbf{E}_1$ と $\mathbf{E}_2$ の位相が 90 度ずれている場合、両者は楕円を形作る (図 6.3b 参照)。この場合を楕円偏波 (elliptic polarization) という。特に、両者の振幅が同じ場合、円偏波 (circular polarization) という。



(a) 線偏波



(b) 楕円偏波

図 6.3: 線偏波と楕円偏波

6.3 電磁波のエネルギー

ところで、系の有する電氣的及び磁氣的エネルギー密度 w_e 、 w_m は

$$w_e = 2^{-1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (6.23)$$

$$w_m = 2^{-1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (6.24)$$

で与えられるから、電磁波の持つエネルギー密度はそれらの和で表される。

これらの式を利用すると、系の有する全エネルギー W の時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \int_V \frac{\partial(w_e + w_m)}{\partial t} dV \\ &= \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV \end{aligned} \quad (6.25)$$

で与えられる。これに式(6.1)、(6.2)を代入し、ベクトル恒等式(1.53)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

の関係を利用すれば、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial W}{\partial t} &= -\int_V (\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}) dV \\ &= \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad (6.26) \end{aligned}$$

を得る。いま考えている系では、エネルギーの損失は無いので、式(6.26)の右辺、即ち、系内のエネルギーの単位時間当たりの減少分は、系の表面から流れ出る電磁波パワーの総和と等しい。即ち、

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (6.27)$$

は、表面から流れ出る電磁波のパワー密度を表し、これをポインティングベクトル(Poynting vector)と言う。

図6.4に電磁波における $\mathbf{P}$ と $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ の関係を示す。等方性(isotropic)媒体の場合には $\mathbf{D}$ と $\mathbf{H}$ の方向は同一で $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ の方向も同一であるから、 $\mathbf{k}$ と $\mathbf{P}$ の方向は同一である。つまり、波面(wave front)の伝搬方向とパワー流(power flow)の進行方向が平行であることを示している。

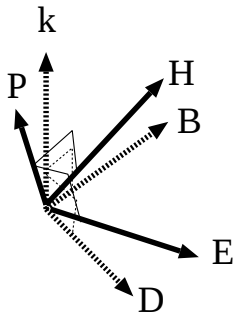


図 6.4: $\mathbf{P}$ と $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ の関係

そして、式(6.13)-(6.16)と比較すると、その場合には $\mathbf{P}$ は $\mathbf{k}$ と同一方向を向き、式(6.17)で定義した電磁波の特性インピーダンス Z_e を利用して

$$|\mathbf{P}| = Z_e^{-1} |\mathbf{E}|^2 = Z_e |\mathbf{H}|^2 \quad (6.28)$$

で与えられることがわかる。

異方性(anisotropic)媒体を考えた場合、 $\mathbf{D}$ と $\mathbf{H}$ もしくは $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ の方向が同一である必要はない。もし、それらの方向が異なれば、波の波面の方向とパワー流の進行方向が異なることを意味する。その様な場合の波動の進行の様子を模式的に図6.5に示す。この様に波動が波面の方向から偏って

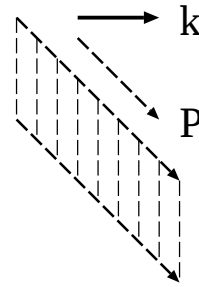


図 6.5: $\mathbf{P}$ と $\mathbf{k}$ が平行でない場合の波動の進行

伝搬することをビームステアリング(*beamsteering*)と言う。また、 $\mathbf{P}$ と $\mathbf{k}$ の間の角をパワーフロー角(power flow angle)と言う。

また、式(6.26)の関係は $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ を実数で表現した場合に成立するものであり、複素数で表現した場合には成立しないことを注意する必要がある。

即ち、 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ を複素数で表現した場合には、その実部が実際の場を表すから、

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\ &= 4^{-1} \{ \mathbf{E} + \mathbf{E}^* \} \times \{ \mathbf{H} + \mathbf{H}^* \} \\ &= 2^{-1} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} + 2^{-1} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H} \} \quad (6.29) \end{aligned}$$

となる。最後の項は時間的に振動しているので、 $\mathbf{P}$ の時間平均を求めれば、

$$\langle \mathbf{P} \rangle = 2^{-1} \Re \{ \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} \} \quad (6.30)$$

となる。これを複素ポインティングベクトル(complex Poynting vector)と呼ぶ。

====例 6-1=====

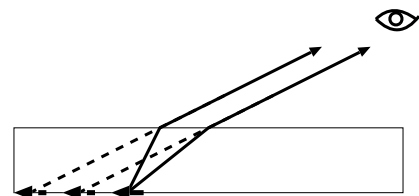


図 6.6: 複屈折

—————例 6-1 終—————

6.4 波源による電磁波の励振

波源 ρ 及び $\mathbf{J}$ によって励振される波動を計算するために、電界 $\mathbf{E}$ を

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (6.31)$$

と表現する。ここで、 ϕ は静電問題で言うスカラーポテンシャルであり、 $\mathbf{A}$ は静磁問題で言うベクトルポテンシャルである。この表現を式 (6.1)-(6.3) に代入すると

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mu\mathbf{H} \quad (6.32)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\epsilon \left(\nabla \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} \right) + \mathbf{J} \quad (6.33)$$

$$-\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = \nabla^2\phi + \rho/\epsilon \quad (6.34)$$

となる。式 (6.32) を (6.33) に代入すると

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = -\epsilon\mu \left(\nabla \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} \right) + \mu\mathbf{J} \quad (6.35)$$

を得る。

式 (6.31) の両辺の回転をとれば、ベクトル恒等式 (1.71)

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0$$

より

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A})$$

となり、 $\nabla \times \mathbf{A}$ は $\nabla \times \mathbf{E}$ と一対一に対応して規定される。一方、式 (6.31) の両辺の発散をとれば、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

となり、 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ の表現に ϕ と $\nabla \cdot \mathbf{A}$ の両方が含まれるため、 $\mathbf{E}$ を規定するには不十分である。そこで、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (6.36)$$

の条件を新たに付加する。この条件を利用すると、式 (6.34)、(6.36) は各々

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = -\rho/\epsilon \quad (6.37)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \quad (6.38)$$

となる。ただし、 $E \propto \exp(+j\omega t)$ とした。式 (6.38) を各成分毎に分けて書けば、

$$\nabla^2 A_i + k^2 A_i = -\mu J_i \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (6.39)$$

となる。この偏微分方程式の形式は式 (6.37) と全く同一である。即ち、式 (6.37) を解くことにより得られた ϕ の表現式において、 ρ/ϵ を μJ_i とすることにより A_i の解が得られる。

いま、点電荷が原点にある場合を考える。 $\rho = \delta(\mathbf{x})$ とすれば、式 (6.37) の右辺は原点以外は零であるから、

$$r^{-1} \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} + k^2\phi = 0 \quad (6.40)$$

となり、この解は

$$\phi = \xi_+ \exp(-jkr)/r + \xi_- \exp(+jkr)/r \quad (6.41)$$

と表現できる。この式における第2項は無遠くから原点に向かって来る波動を表すから、ここで考えている問題では物理的に $\xi_- = 0$ である。

この場合、式 (6.37) の左辺を原点を含む体積にわたり積分すれば、

$$\int_V (\nabla^2\phi + k^2\phi) dV = \int_S \nabla\phi \cdot d\mathbf{S} + \int_V k^2\phi dV \quad (6.42)$$

を得る。 V を無限に小さくした場合、式 (6.37) の右辺の第2項は零であり、第1項は式 (6.42) を代入すると

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_S \nabla\phi \cdot d\mathbf{S} \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\partial\phi}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 \right] = -4\pi\xi_+ \quad (6.43)$$

となる。一方、式 (6.37) の右辺を原点を含む体積にわたり積分すれば $-\epsilon^{-1}$ となるから、これと式 (6.43) を比較すると、 $\xi_+ = (4\pi\epsilon)^{-1}$ となる。従って、最終的に

$$\phi = \frac{\exp(-jkr)}{4\pi\epsilon} \quad (6.44)$$

を得る。

次に、一般の電荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ の場合を考える。

$$\rho(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \quad (6.45)$$

であるから、 $\rho(\mathbf{x})$ をデルタ関数波源の集合体と考え、重畳の理を適用することにより、

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\exp(-jk|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi\epsilon|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (6.46)$$

を得る。同様に、一般の電流分布 $\mathbf{J}$ に対しては

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\mu \exp(-jk|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mathbf{J}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (6.47)$$

となる。

これらの式は指数関数中の $k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ を零とすることにより、各々静電界における電位と電荷の関係 (式 (4.44)) 並びに静磁界におけるベクトルポテンシャルと電流の関係 (式 (5.27)) と同一となる。即ち、静電界並びに静磁界は、作用反作用間の位相差 (遅延時間) が問題とならない場合に成立する近似であることがわかる。

6.5 スネルの法則

図 6.7 の様に、2 つの媒体 1, 2 が平面で接しており、そこへ平面波が角度 θ_i で入射 (incidence) した場合を考える。その時、境界を通過する際に、平面波のある部分は反射 (reflection) され、その外は屈折 (deflect) して透過 (transmission) してゆくことはよく知られている。

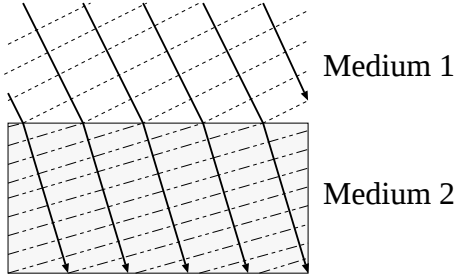


図 6.7: 境界における波の屈折

反射波並びに透過波も平面波であり、境界面においてそれらの位相は入射波のそれと一致している必要がある (図 6.7 参照)。従って、反射波と透過波の境界面に添う方向の位相の変化が等しい必要がある。即ち、反射波と透過波の波数ベクトルをそれぞれ $\mathbf{k}_r$ 、 $\mathbf{k}_t$ とすれば、これらは入射波の波数ベクトル $\mathbf{k}_i$ との間に

$$\mathbf{k}_r \times \mathbf{n} = \mathbf{k}_t \times \mathbf{n} = \mathbf{k}_i \times \mathbf{n} \quad (6.48)$$

の関係が成立する必要が有る。これをスネルの法則 (Snell's law) という。

等方性で線形な伝搬媒体の場合、 $|\mathbf{k}| = \omega/V$ とかける。ここで、 V は波動の位相速度 (phase velocity) である。従って、各領域の位相速度を添字で区別すれば、反射角 (reflection angle) θ_r と透過角 (transmission angle) θ_t は

$$V_1^{-1} \sin \theta_r = V_2^{-1} \sin \theta_t = V_1^{-1} \sin \theta_i \quad (6.49)$$

から、

$$\theta_r = \theta_i \quad (6.50)$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{V_2}{V_1} \quad (6.51)$$

を得る。光の場合、光速を C 、屈折率 (refractive index) を n とすれば、 $n = C/V$ の関係が有るので、式 (6.51) はよく知られた

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} \quad (6.52)$$

の表現式を得る。

異方性を有する媒体の場合、前節で述べた逆速度面 (slowness surface) を利用して幾何学的に求めるのが便利である。

即ち、図 6.8 の様に上半面には媒体 1 の逆速度面を描き、下半面には媒体 2 の逆速度面を描く。入射角を規定すると入射波の逆速度が得られる。反射波と透過波の逆速度を基線に写像したものと同じ長さを、基線の正方向にも取り、そこから垂線を引く。その垂線が逆速度面と交差した 2 点へ原点からベクトルを引くと、それらは反射波と透過波の逆速度を与える。

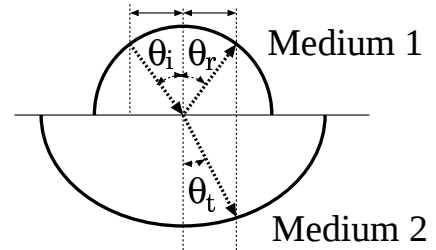


図 6.8: 逆速度面を用いたスネルの法則の表現

また、異方性媒体の場合、一般に、伝搬方向は同じでも偏波面によって位相速度が異なる。その場合、一つの入射波に対して、複数の反射波、または透過波が生じることになる。この現象を複屈折という。この場合のスネルの法則も、逆速度面を重ねて書くことにより、幾何学的に求めることができる。

6.6 反射特性

スネルの法則によって波動の反射並びに透過特性における波数の関係が得られるが、反射率等の振幅特性を評価するには不十分で、境界条件を考慮する必要がある。

図 6.9 において、媒体 1 から媒体 2 の方向へ伝搬する波動を考える。媒体 1, 2 共に等方性で、それぞれの領域における誘電率を ϵ_1 、 ϵ_2 、透磁率を μ_1 、 μ_2 とする。

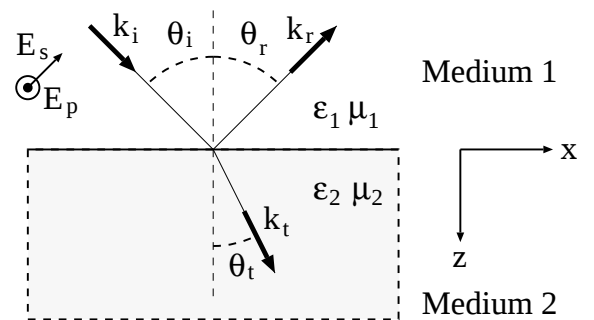


図 6.9: 波動の反射並びに透過

この場合、スネルの法則(式(6.51))より、

$$\sin \theta_t = \frac{V_2}{V_1} \times \sin \theta_i \quad (6.53)$$

を得る。また、境界条件は

1. $\mathbf{E}$ の境界面と平行成分が連続
2. $\mathbf{H}$ の境界面と平行成分が連続
3. $\mathbf{D}$ の境界面と垂直成分が連続
4. $\mathbf{E}$ の境界面と垂直成分が連続

である。そして、媒体 n においては、 $|\mathbf{E}| = Z_n |\mathbf{H}|$ の関係が成立し、 $Z_n = \sqrt{\mu_n / \epsilon_n}$ である。

入射波の波数を $\mathbf{k}_i$ とすれば、電磁波の性質として電界 $\mathbf{E}$ は $\mathbf{k}_i$ と直交している。前章で述べたように、任意の平面波は互いに直交する2つの直線偏波平面波に分解できるので、電界を境界面と平行な p 偏波とそれと垂直な s 偏波成分に分解し、それぞれの特性について評価する。

6.6.1 p 偏波

この場合の電磁界は、図6.9の座標系において、 E_y 、 H_x 、 H_z 成分のみを持つ。入射波、反射波と透過波の E_y をそれぞれ E_i 、 E_r 、 E_t とすれば、 $\mathbf{E}$ の連続性より

$$E_i + E_r = E_t \quad (6.54)$$

を得る。また、 $\mathbf{H}$ の連続性より、

$$Z_1^{-1}(E_i - E_r) \cos \theta_i = Z_2^{-1} E_t \cos \theta_t \quad (6.55)$$

を得る。なお、この場合、 $\mathbf{D}$ の境界面と垂直成分は零である。一方、 $\mathbf{B}$ の連続性は

$$\mu_1 Z_1^{-1}(E_i + E_r) \sin \theta_i = \mu_2 Z_2^{-1} E_t \sin \theta_t \quad (6.56)$$

を与えるが、 $\mu_n Z_n^{-1} = V_n^{-1}$ であるから、スネルの法則(式(6.51))を適用すれば、式(6.56)は式(6.53)と同一のものとなる。

式(6.54)と(6.55)から、振幅反射係数 (amplitude reflection coefficient) r_p と振幅透過係数 (amplitude transmission coefficient) t_p は

$$r_p = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_1^{-1} \cos \theta_i - Z_2^{-1} \cos \theta_t}{Z_1^{-1} \cos \theta_i + Z_2^{-1} \cos \theta_t} \quad (6.57)$$

$$t_p = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 Z_1^{-1} \cos \theta_i}{Z_1^{-1} \cos \theta_i + Z_2^{-1} \cos \theta_t} \quad (6.58)$$

で与えられる。

$Z_n > 0$ なので $|r_p| \leq 1$ であるが、 $Z_1^{-1} \cos \theta_i > Z_2^{-1} \cos \theta_t$ ならば $t_p \geq 1$ となることがわかる。このことはエネルギー

の保存則を満たしていない様に見えるが、これは媒体が変わると波動インピーダンスが異なり、振幅が絶対的な比較の尺度とならないことに起因する。

そこで、電力反射係数 (power reflection coefficient) R_p と電力透過係数 (power transmission coefficient) T_p を境界面を通過するパワーフローの比として定義すると、

$$R_p = \frac{\cos \theta_i Z_1^{-1} E_r^2}{\cos \theta_i E_i^2} = |r_p|^2 \quad (6.59)$$

$$T_p = \frac{\cos \theta_t Z_2^{-1} E_t^2}{\cos \theta_i Z_1^{-1} E_i^2} = 1 - R_p \quad (6.60)$$

となり、エネルギーの保存則を満足していることがわかる。

6.6.2 s 偏波

この場合の電磁界は、図6.9の座標系において、 H_y 、 E_x 、 E_z 成分のみを持つ。入射波、反射波と透過波の H_y をそれぞれ H_i 、 H_r 、 H_t とすれば、 $\mathbf{H}$ の連続性より

$$H_i + H_r = H_t \quad (6.61)$$

を得る。また、 $\mathbf{E}$ の連続性より、

$$Z_1(H_i - H_r) \cos \theta_i = Z_2 H_t \cos \theta_t \quad (6.62)$$

を得る。なお、この場合、 $\mathbf{B}$ の境界面と垂直成分は零である。一方、 $\mathbf{D}$ の連続性は

$$\epsilon_1 Z_1(H_i + H_r) \sin \theta_i = \epsilon_2 Z_2 H_t \sin \theta_t \quad (6.63)$$

を与えるが、 $\epsilon_n Z_n = V_n^{-1}$ であるから、スネルの法則(式(6.51))を適用すれば、式(6.63)は式(6.61)と同一のものとなる。

式(6.61)と(6.62)から、振幅反射係数 r_s と振幅透過係数 t_s は

$$r_s = \frac{Z_1 H_r}{Z_1 H_i} = \frac{Z_1 \cos \theta_i - Z_2 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t} \quad (6.64)$$

$$t_s = \frac{Z_2 H_t}{Z_1 H_i} = \frac{2 Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t} \quad (6.65)$$

で与えられる。また、電力反射係数 R_p と電力透過係数 T_p は

$$R_s = \frac{\cos \theta_i Z_1^{-1} E_r^2}{\cos \theta_i Z_1^{-1} E_i^2} = |r_s|^2 \quad (6.66)$$

$$T_s = \frac{\cos \theta_t Z_2^{-1} E_t^2}{\cos \theta_i Z_1^{-1} E_i^2} = 1 - R_s \quad (6.67)$$

で与えられる。

図6.10に真空から石英ガラス ($n = 1.458$) に光を入射した時の電力反射係数を示す。この特性は入射波の偏波方向

に依存するが、垂直入射 ($\theta_i = 0$) の場合は両方の特性が一致する。p 偏波入射の場合、境界面での反射が零となる入射角が存在する。この角度 θ_B はブルースター角 (Brewster angle) と呼ばれる。式 (6.64) において $r_s = 0$ となる条件から

$$\theta_B = \cos^{-1} \sqrt{\frac{1 - (V_2/V_1)^2}{(Z_2/Z_1)^2 - (V_2/V_1)^2}} \quad (6.68)$$

を得る。

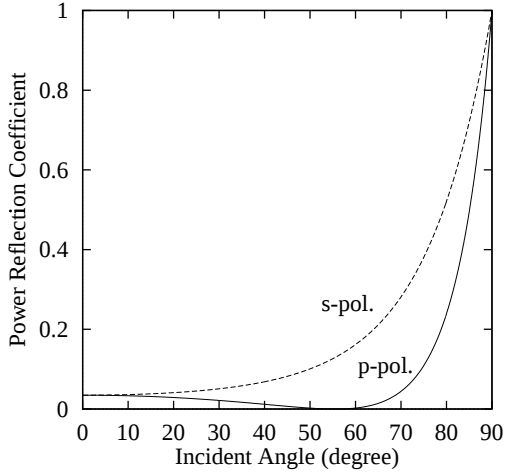


図 6.10: 真空から石英ガラス ($n = 1.458$) に光を入射した時の反射係数

ブルースター角の存在は、レーザ等で、p 偏波のみを取り出し、単一偏波の波動を作り出すのに利用される。

図 6.11 にガラスから真空へ光を入射した時の反射係数を示す。この場合も、p 偏波入射の場合にブルースター角 θ_B が存在する。また、 $\sin \theta_i > V_1/V_2$ の時、スネルの法則 (式 (6.51)) を満足できる θ_t は存在しない。即ち、透過波は存在せず、入射された波動の全パワーは境界面で反射される。このような状況を全反射 (total reflection) という。また、全反射となる限界の角度 $\theta_c = \sin^{-1}(V_1/V_2)$ は臨界角 (critical angle) と呼ばれる。

$\theta_i > \theta_c$ においては、式 (6.53) より

$$\theta_t = \frac{\pi}{2} + j\psi \quad (6.69)$$

と書ける。ここで、

$$\psi = \cosh^{-1} \left(\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c} \right) \quad (6.70)$$

である。これを式 (6.57) と (6.64) に代入すれば

$$r_p = \frac{Z_1^{-1} \cos \theta_i + jZ_2^{-1} \sinh \psi}{Z_1^{-1} \cos \theta_i - jZ_2^{-1} \sinh \psi} = \exp(j\phi_p) \quad (6.71)$$

$$r_s = \frac{Z_1 \cos \theta_i + jZ_2 \sinh \psi}{Z_1 \cos \theta_i - jZ_2 \sinh \psi} = \exp(j\phi_s) \quad (6.72)$$

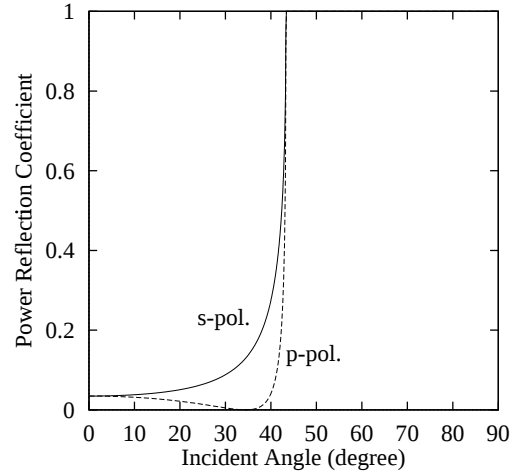


図 6.11: 石英ガラス ($n = 1.458$) から真空に光を入射した時の反射係数

となり、全反射を反映して $|r_p| = |r_s| = 1$ である。ここで、

$$\phi_p = 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z_1^{-1} \cos \theta_i}{Z_2^{-1} \sinh \psi} \right) \quad (6.73)$$

$$\phi_s = 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z_1 \cos \theta_i}{Z_2 \sinh \psi} \right) \quad (6.74)$$

であり、 ϕ_p 並びに ϕ_s は反射による位相変化を表している。これらを代表して ϕ と表現すれば、これらの位相変化は図 6.12 の様に空間的に距離 ϕ/ω だけ反射面がずれることに相当する。

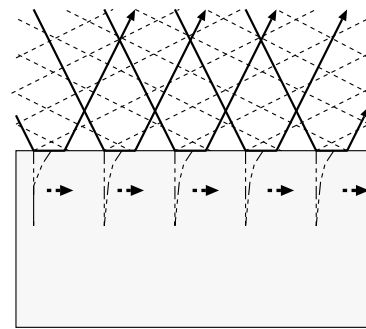


図 6.12: 全反射

一方、式 (6.58) と (6.65) より

$$t_p = \frac{2Z_2^{-1} \cos \theta_i}{Z_1^{-1} \cos \theta_i - jZ_2^{-1} \sinh \psi} \quad (6.75)$$

$$t_s = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_i - jZ_2 \sinh \psi}$$

となり、 $|t_p| \neq 0$ 、 $|t_s| \neq 0$ である。即ち、導体板による反射と異なり、基板内部まで波動が浸透していることがわかる。

$|r_p| = |r_s| = 1$ であるにもかかわらず、 $|t_p| \neq 0$ 、 $|t_s| \neq 0$ であることはどういうことを意味するのであろうか。

$\mathbf{k}$ を成分に分けて表記すれば、 $k_z = \cos \theta |\mathbf{k}|$ である。これを式 (6.69) に代入すれば、媒体 2 中での k_z は

$$k_z = \cos(\pi + j\psi) \cdot (\omega/V_2) = -j \sinh \psi \cdot (\omega/V_2) \quad (6.76)$$

となり、全反射の時には k_z は純虚数となる。このため、図 6.12 の様に、媒体 2 に入射した波動は z 方向に指数関数的に減衰することになる。この様な伝搬状態をエバネセント (evanescent) という。

エバネセントな場合は z 方向に指数関数的に減衰しているが、これは導電抵抗による損失のようなエネルギーの損失に起因する減衰と異なり、波動のエネルギーは媒体 2 の表面付近に一時閉じこめられ、反射波として再放射される。

6.7 多重反射

図 6.13 の様に、境界面が平行な 3 つの媒体に、媒体 1 から入射 θ_i で平面波が入射した場合を考える。この場合、媒体 1,2 と媒体 2,3 間の反射が干渉 (interfere) する。

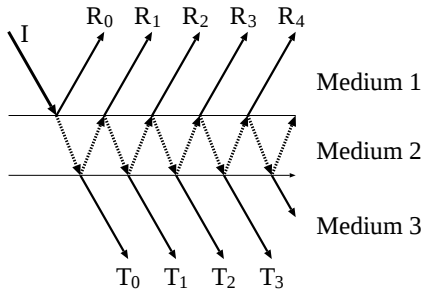


図 6.13: 多重反射

媒体 m から媒体 n に波動が入射した場合の振幅反射率を r_{mn} 、透過率を t_{mn} とする。入射波の振幅を I とすれば n 番目の反射波の振幅 R_n と透過波の振幅 T_n は

$$R_0/I = r_{12}$$

$$R_n/I = t_{12}t_{21}r_{21}^{-1}\{r_{21}r_{23}\exp(-2j\xi)\}^n$$

$$T_n/I = t_{12}t_{23}\exp(-j\xi)\{r_{23}r_{21}\exp(-2j\xi)\}^n$$

である。ここで、 ξ はビームが媒体 2 を通過する際の位相変化で、 $\xi = k_2 d \cos \theta_2$ で与えられる。従って、系全体の

反射特性 r 並びに透過特性 t は

$$r = r_{12} + t_{12}t_{21}r_{21}^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \{r_{21}r_{23}\exp(-2j\xi)\}^n$$

$$= r_{12} - \frac{t_{12}t_{21}r_{23}\exp(-2j\xi)}{r_{21}r_{23}\exp(-2j\xi) - 1} \quad (6.77)$$

$$t = t_{12}t_{23}\exp(-j\xi) \sum_{n=0}^{+\infty} \{r_{21}r_{23}\exp(-2j\xi)\}^n$$

$$= -\frac{t_{12}t_{23}\exp(-j\xi)}{r_{21}r_{23}\exp(-2j\xi) - 1} \quad (6.78)$$

となる。

式 (6.57)、(6.64) から

$$r_{mn} = -r_{nm} \quad (6.79)$$

が成立する。しかも、 c を定数として、 $\mathbf{E}$ の連続性から得られる

$$1 + r_{mm} = ct_{mn}$$

$$1 + r_{nn} = c^{-1}t_{nm}$$

の関係から導かれる

$$r_{mn}^2 + t_{mn}t_{nm} = 1 \quad (6.80)$$

が成立するから、これを式 (6.77)、(6.78) に代入すると

$$r = \frac{r_{12} + r_{23}\exp(-2j\xi)}{1 + r_{12}r_{23}\exp(-2j\xi)} \quad (6.81)$$

$$t = \frac{t_{12}t_{23}\exp(-j\xi)}{1 + r_{12}r_{23}\exp(-2j\xi)} \quad (6.82)$$

を得る。

ξ が周波数の関数であるため、反射透過特性も周波数によって変化することがわかる。式 (6.81) より $r_{12}r_{23} > 0$ ならば $\xi = n\pi$ の時に r は最大値 $(r_{12} - r_{23})/(1 - r_{12}r_{23})$ を取る。ガラス上の薄い石鹸膜に色が付いて見えることがこれに相当する。

なお、 $r_{12}r_{23} < 0$ ならば $\xi = (n + 1/2)\pi$ の時に r は最大値 $(r_{12} + r_{23})/(1 + r_{12}r_{23})$ を取る。

媒体 1 と 3 が同じ材料である場合を求めてみると、 $r_{23} = r_{21} = -r_{12}$ から

$$r = r_{12} \frac{1 - \exp(-2j\xi)}{1 - r_{12}^2 \exp(-2j\xi)} \quad (6.83)$$

$$t = \frac{(1 - r_{12}^2) \exp(-j\xi)}{1 - r_{12}^2 \exp(-2j\xi)} \quad (6.84)$$

となる。これらから $\xi = n\pi$ の時 $r = 0$ となり、入射波が特定の波長または入射角の時に反射されずにそのまま透過することがわかる。これは、上面での反射と下面での反射の振幅が同一で、位相が反転しているから、基板内の伝搬に伴う位相差が 2π の整数倍の時に互いに相殺することに起因する。

また、式 (6.81) より、媒体 1 と 3 が異なる場合であっても、 $r_{12} = r_{23}$ で $\xi = (n + 1/2)\pi$ の時に入射波が特定の波長または入射角の時に反射されずに透過する。これは、上面での反射と下面での反射の振幅と位相共に同一の時、基板内の伝搬に伴う位相差が 2π の半整数倍の時に互いに相殺することに起因する。この現象はレンズ等の無反射コーティング (non-reflection coating) として利用されている。

興味深いのは、エバネセントの場合の振舞いである。式 (6.83) と (6.84) において $\xi = -jk_2 d \sinh \psi$ とおけば

$$r = \exp(j\phi) \frac{1 - \exp(-2k_2 d \sinh \psi)}{1 - \exp(2j\phi - 2k_2 d \sinh \psi)} \quad (6.85)$$

$$t = \frac{\{1 - \exp(2j\phi)\} \exp(-2k_2 d \sinh \psi)}{1 - \exp(2j\phi - 2k_2 d \sinh \psi)} \quad (6.86)$$

である。ここで、 ψ は式 (6.70) によって与えられ、 ϕ は p 偏波の場合式 (6.71) によって、s 偏波の場合式 (6.72) によって与えられる。

式 (6.85) より、 $k_2 d \sinh \psi \ll 1$ を満足するように媒体 2 を非常に薄くすると $r \cong 0$ となることがわかる。なお、入射角が臨界角に近いほど $\sinh \psi \cong 0$ となる。これは波動の伝搬し得ない媒体であっても、それを非常に薄くすることによって波動が透過し得ることを示している。これは基板が薄くなると指数関数的に減衰するエバネセントな場でも媒体 2 の下面にも到達できるためである。また、この現象は量子力学で言うトンネル現象に相当する。

なお、式 (6.81)-(6.84) によれば、媒体 2 が非常に厚く、 ϕ が極めて大きい場合でもこのような干渉現象は観測される事になる。しかし、光学現象としてこれを観測することは難しい。これは入射する光のスペクトラムに広がりがあるため、ある波長では干渉により相殺するが、別な波長では加え合わされ、干渉現象がマスクされてしまうためである。