

令和2年9月25日版

伝送工学

2. 時間領域・周波数領域

千葉大学工学部

総合工学科電気電子工学コース

橋本研也

k.hashimoto@ieee.org

<http://www.te.chiba-u.jp/lab/ken>

フーリエ級数展開

周期 T の周期関数 $e(t)$ は正弦波の集合として表現可能

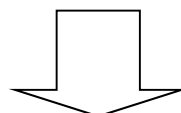
$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n \exp(j\omega_n t)$$

ここで、 $\omega_n = 2n\pi/T$

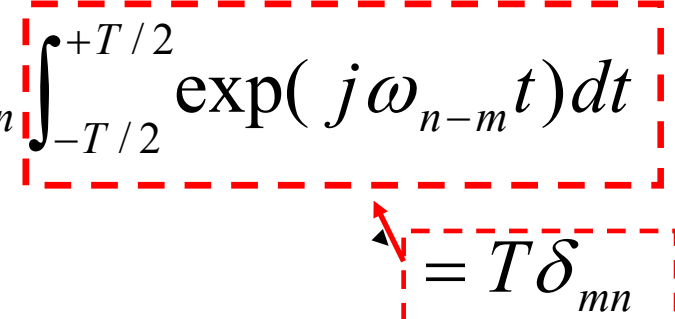
E_n :各周波数成分の大きさ(スペクトル、スペクトラム)

両辺に $\exp(-j\omega_m t)$ を乗じて、 $t=[0, T]$ の範囲で積分すると

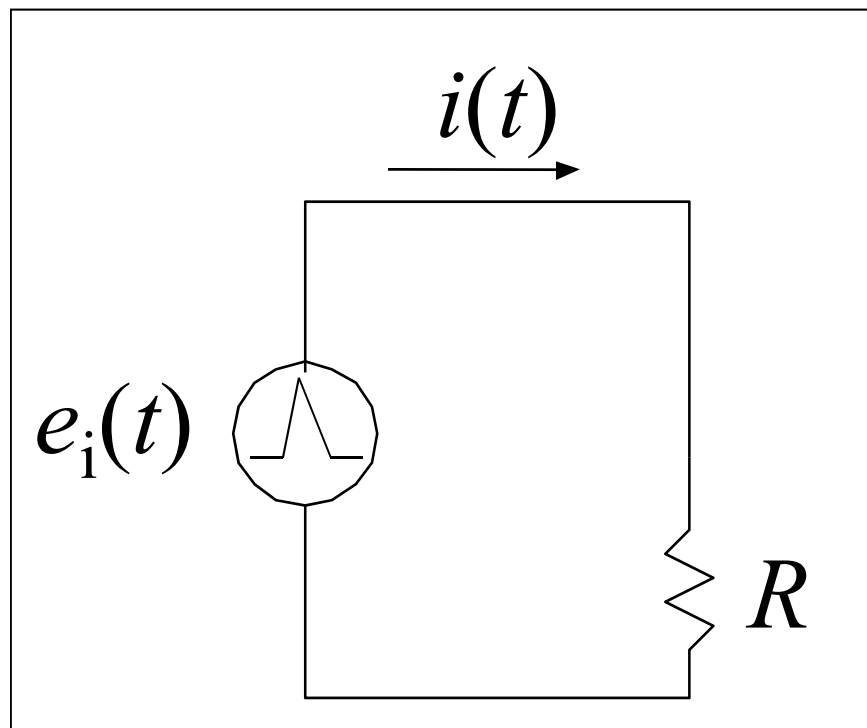
$$\int_{-T/2}^{+T/2} e(t) \exp(-j\omega_m t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n \int_{-T/2}^{+T/2} \exp(j\omega_{n-m} t) dt$$



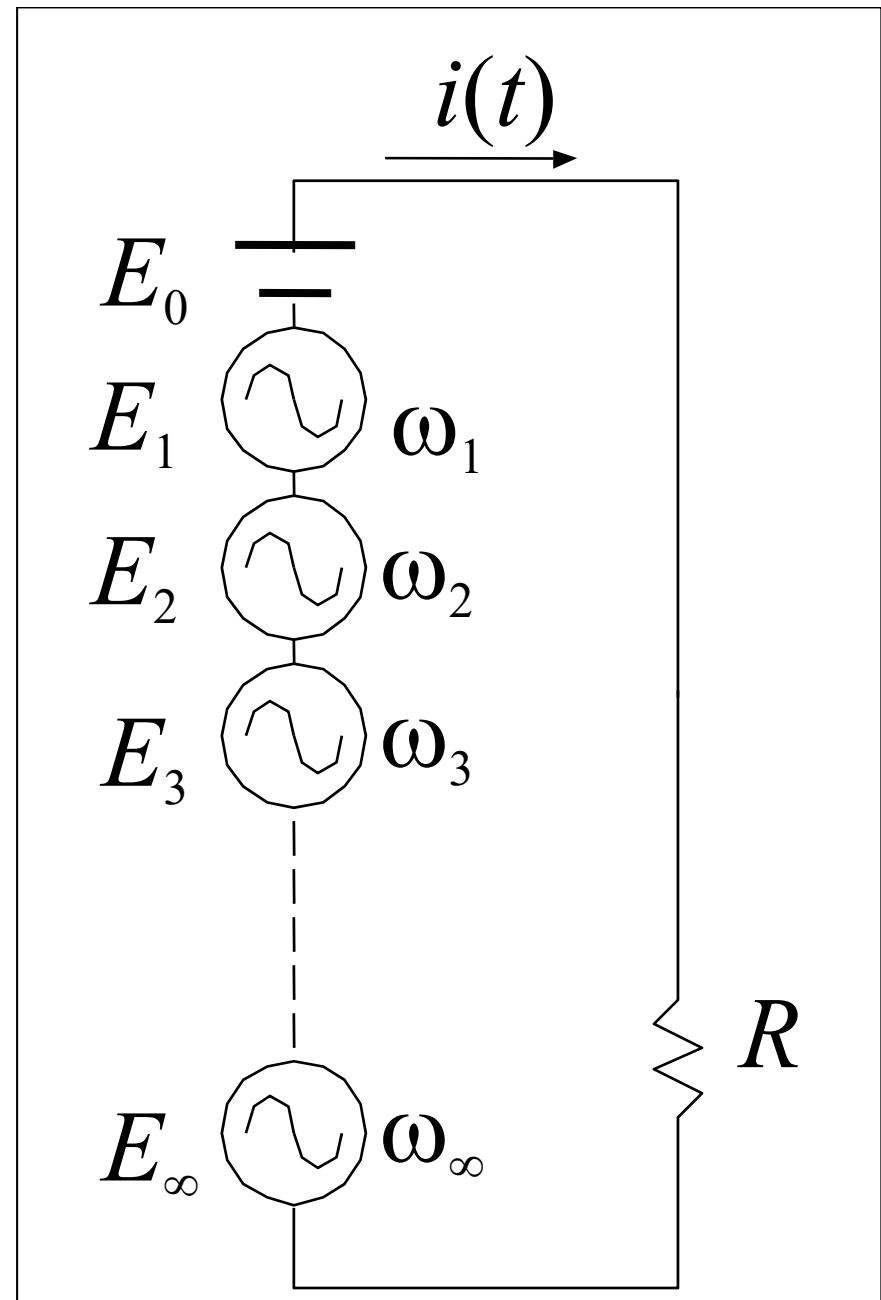
$$E_m = T^{-1} \int_{-T/2}^{+T/2} e(t) \exp(-j\omega_m t) dt$$


 $= T \delta_{mn}$

正弦波の集合による表現とは？



(a) 時間的に変動する
信号源



(b) フーリエ級数による表現

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n \exp(j\omega_n t) \text{ の関係より、}$$

1. $e(t)$ が実数ならば、 $E_{-n}=E_n^*$

証明: $e(t)$ が実数ならば、 $e(t)=e(t)^*$

$$e(t)^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n^* \exp(-j\omega_n t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} E_{-l}^* \exp(j\omega_l t)$$

の関係より $E_{-n}=E_n^*$ が成立

$$\Rightarrow e(t) = E_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2|E_n| \cos(\omega_n t + \angle E_n)$$

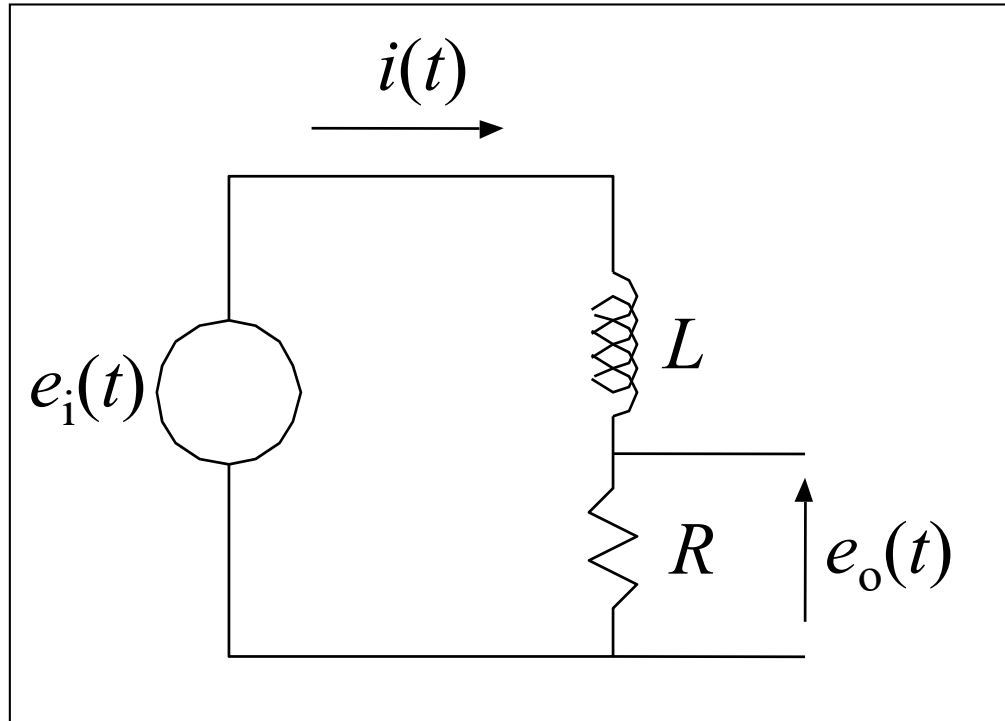
2. $e(-t)=e(t)$ ならば、 $E_{-n}=E_n$

$$\Rightarrow e(t) = E_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cos(\omega_n t)$$

3. $e(-t)=-e(t)$ ならば、 $E_{-n}=-E_n$

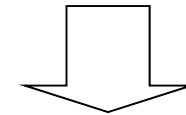
$$\Rightarrow e(t) = 2j \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \sin(\omega_n t)$$

例題：回路の応答の解析



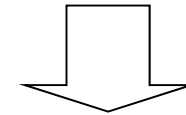
$$e_i(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

$$e_o(t) = Ri(t)$$



$$E_{in} = j\omega_n LI_n + RI_n$$

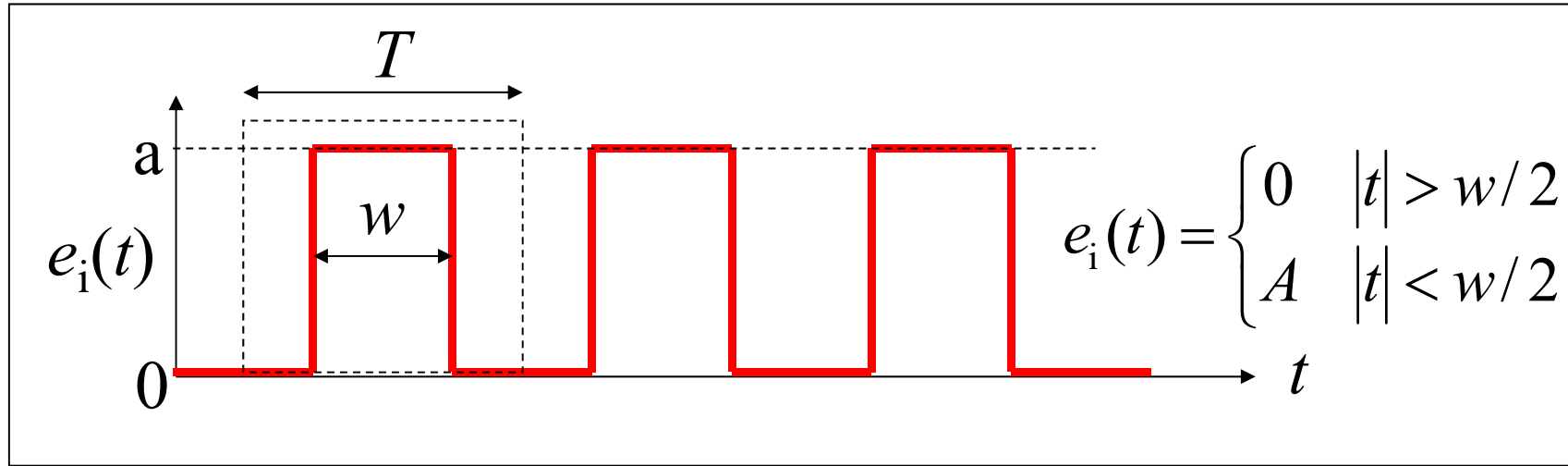
$$E_{on} = RI_n$$



$$E_{on} = \frac{E_{in}}{1 + j\omega_n L / R}$$

$$\begin{pmatrix} i(t) \\ e_i(t) \\ e_o(t) \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} I_n \\ E_{in} \\ E_{on} \end{pmatrix} \exp(+j\omega_n t)$$

矩形波



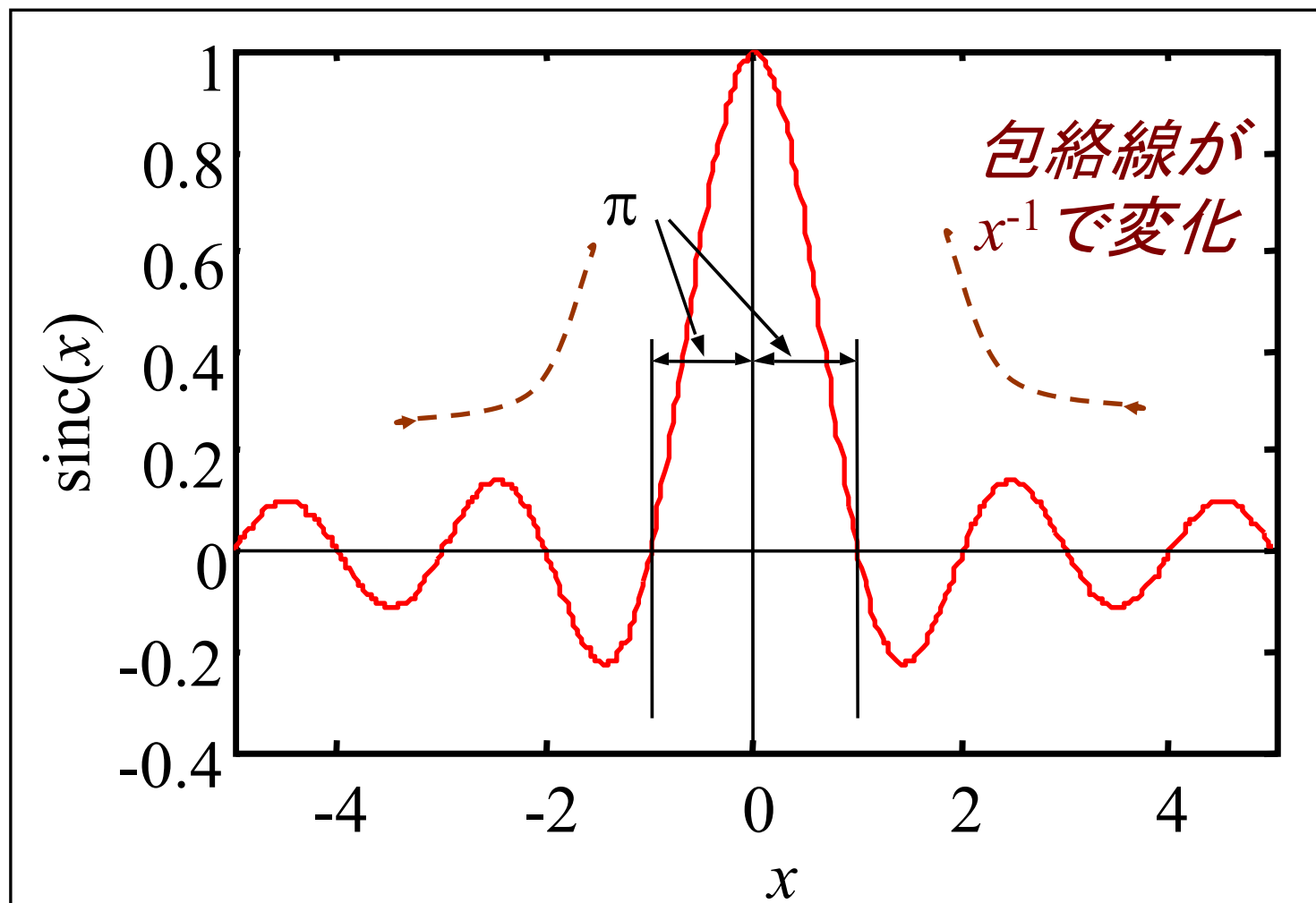
$$E_{in} = T^{-1} \int_{-w/2}^{+w/2} a \exp(-j\omega_m t) dt = a \frac{W}{T} \text{sinc}(\omega_m w / 2\pi)$$

ここで $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$

$\text{sinc}(0) = 1$ であるから

$$E_{i0} = aW / T \quad (\text{平均値})$$

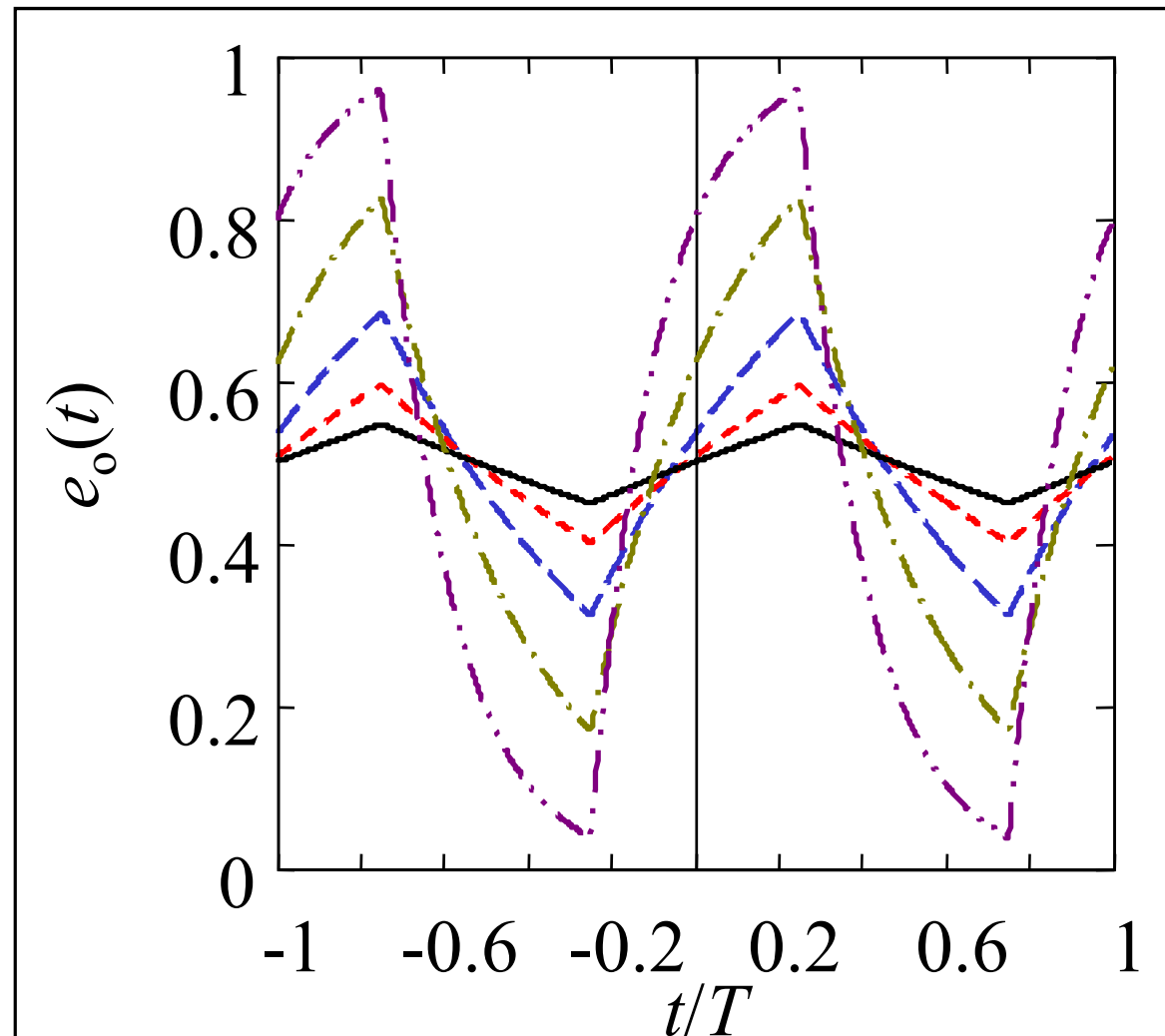
シンク関数

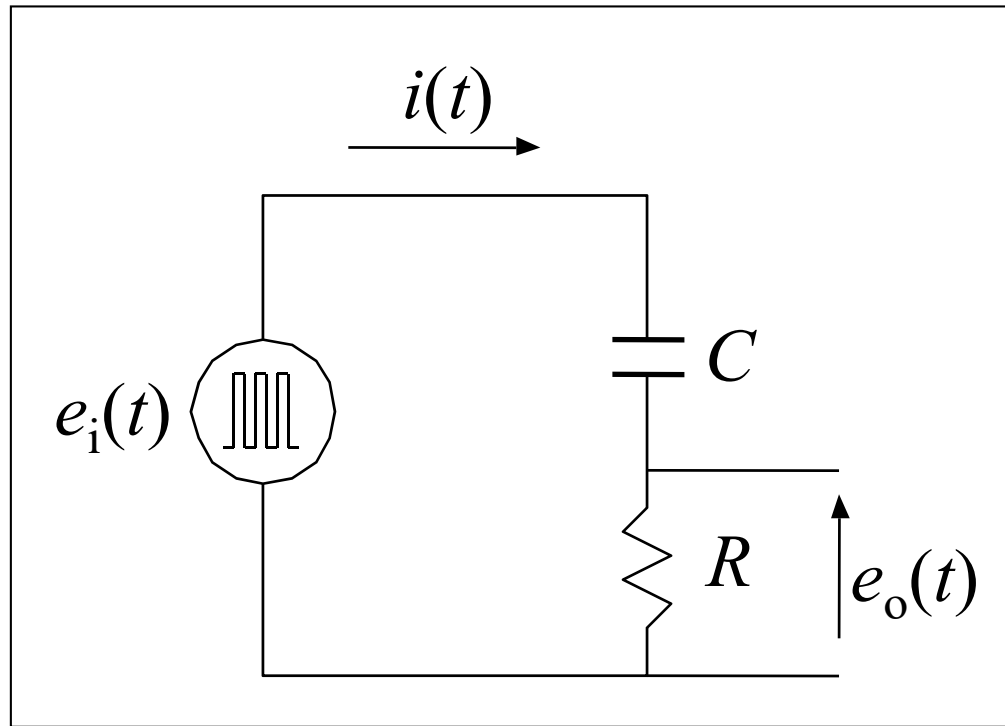


$$\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$$

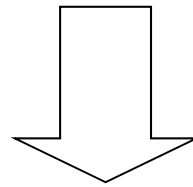
矩形波入力に対する応答

$$e_o(t) = a \frac{W}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sinc}(\omega_n w / 2\pi)}{1 + j\omega_n L / R} \exp(+j\omega_n t)$$



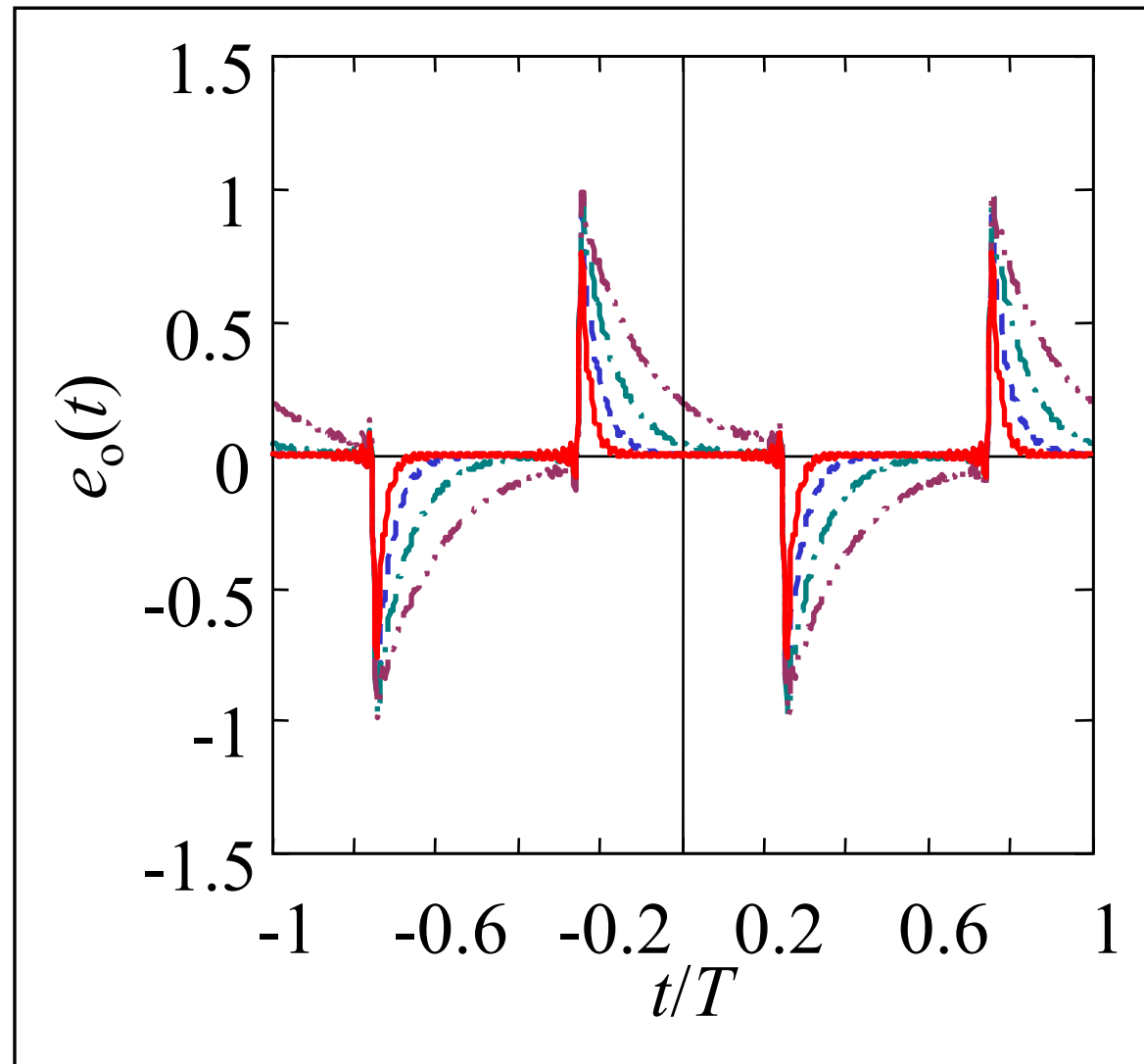


$$E_{on} = \frac{j\omega_n CRE_{in}}{1 + j\omega_n CR}$$



$$e_o(t) = a \frac{W}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j\omega_n CR \operatorname{sinc}(\omega_n w / 2\pi)}{1 + j\omega_n CR} \exp(+j\omega_n t)$$

矩形波入力に対する応答



関数の直交性(類似性の無さ)

$$\int_a^b w(x) f_m(x) f_n^*(x) dx = \delta_{mn} \int_a^b |f_m(x)|^2 dx$$

例1:

$f_m(x) = \exp(jmx)$, $w(x) = 1$, $x = [-\pi, +\pi]$ とした場合、

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \exp\{j(m-n)x\} dx = 2\pi \delta_{mn}$$

例2:

$f_m(x) = T_m(x) = \cos(m \cos^{-1}(x))$,
 $w(x) = 1 / \sqrt{1-x^2}$, $x = [-1, +1]$ とした場合、

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi} \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{mn} (1 + \delta_{m0})$$

関数の完全性

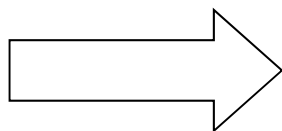
$x=[a,b]$ の範囲で定義された任意の関数 $e(x)$ を

関数列 $f_m(x)$ の和として表現(a_m は係数)

$$e(x) = \sum_{n=-M}^{+M} a_m f_m(x)$$

$$S = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\int_a^b \left| e(x) - \sum_{m=-M}^{+M} a_m f_m(x) \right|^2 dx \right] = 0$$

が成立する時、 $f_m(x)$ は完全系をなすと言う。



普通の意味では以下の様に表現できる時

$$e(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m f_m(x)$$

パーシバルの定理

$$T^{-1} \int_{-T/2}^{+T/2} |e(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |E_n|^2$$

証明:

$$\begin{aligned} T^{-1} \int_{-T/2}^{+T/2} |e(t)|^2 dt &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_m E_n^* T^{-1} \int_{-T/2}^{+T/2} \exp(j\omega_{m-n}t) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |E_n|^2 \end{aligned}$$

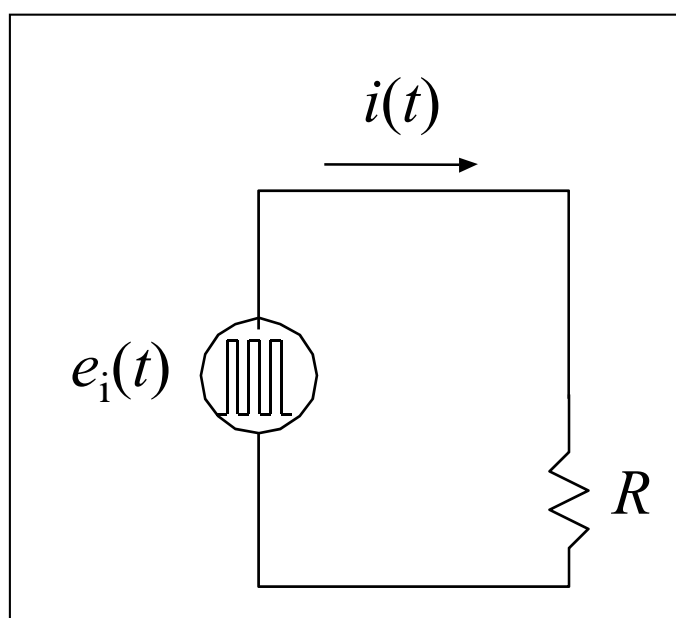
$= \delta_{m-n}$

注: 以下の e_{RMS} は $e(t)$ の実効値

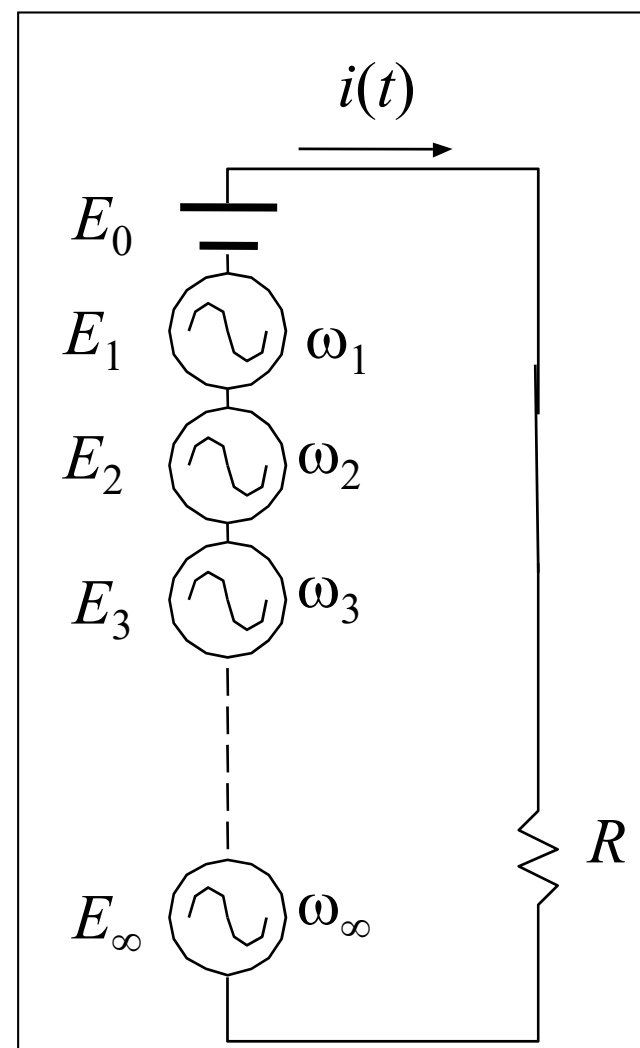
$$e_{\text{RMS}} = \sqrt{T^{-1} \int_{-T/2}^{+T/2} |e(t)|^2 dt} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |E_n|^2}$$

$$T^{-1} \int_{-T/2}^{+T/2} R^{-1} |e(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R^{-1} |E_n|^2$$

各電源からの出力エネルギーの和は元の電源の出力エネルギーと同一



(a) 周期的な信号源



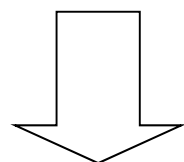
(b) フーリエ展開による表現

フーリエ変換とフーリエ逆変換

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n T \exp(j\omega_n t) \bullet \frac{2\pi}{T}$$

$$E_m T = \int_{-T/2}^{+T/2} e(t) \exp(-j\omega_m t) dt$$

ここで、 $\omega_n = 2n\pi/T$



周期 T を無限とすれば

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \exp(-j\omega t) dt$$

任意の関数 $e(t)$ は正弦波の集合として表現可能

フーリエ変換と逆変換

$$E(\omega) = \mathcal{F}[e(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$e(t) = \mathcal{F}^{-1}[E(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) \exp(+j\omega t) d\omega$$

もしくは $\omega=2\pi f$ とおくと

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \exp(-2\pi jft) dt$$

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(f) \exp(+2\pi jft) df$$

$E(\omega)$: 周波数成分の大きさ(スペクトル、スペクトラム)

任意の信号は正弦波の集合 で表現可能

- 正弦波＝完全性(集合で表現可能)
- $E(\omega)$: スペクトラム(各周波数成分の大きさ)
- 正弦波は直交関数＝パーシバルの定理が成立
 $|E(\omega)|^2$ は各周波数成分の持つエネルギー
- 一般に信号は周波数帯域が有限
- 信号は実数

フーリエ変換の性質

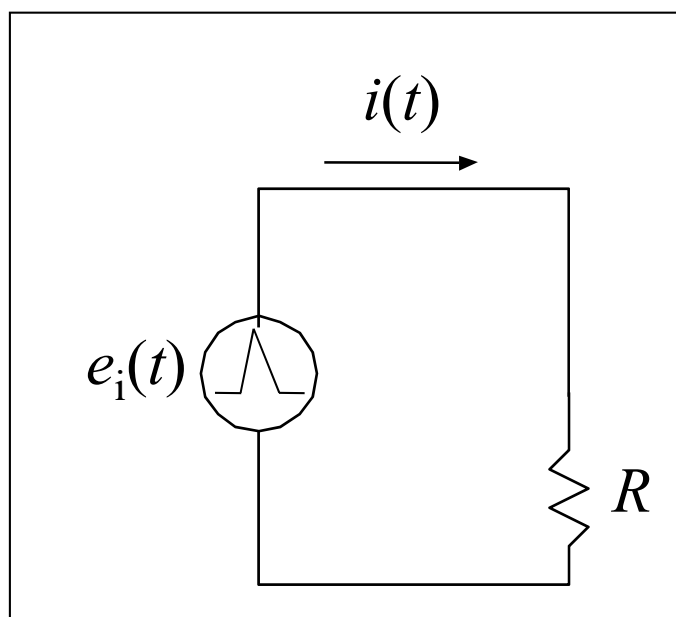
$$E(\omega) = \mathcal{F}[e(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \exp(-j\omega t) dt$$

- $e(t)$ が実数ならば、 $E(-\omega) = E(\omega)^*$
- $e(t)$ が対称($e(-t) = e(t)$)ならば、 $E(\omega)$ は純実数
- $e(t)$ が斜対称($e(-t) = -e(t)$)ならば、 $E(\omega)$ は純虚数
- $E(0)$ [DC成分]は面積
- 滑らかな変化は高周波成分少
- パーシバルの定理

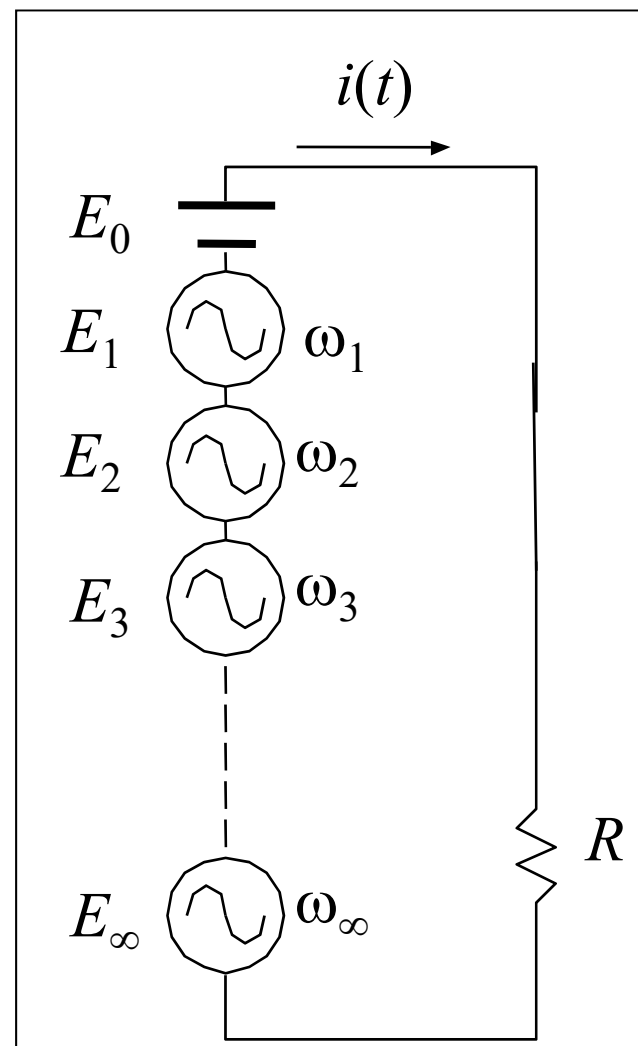
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |E(\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R} |e(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R} |E(\omega)|^2 d\omega$$

各電源からの出力エネルギーの和は元の電源の出力エネルギーと同一



(a) 時間的に変動する信号源



(b) フーリエ変換による表現

線形性 $\Rightarrow \mathcal{F}[a_1 e_1(t) + a_2 e_2(t)] = a_1 E_1(\omega) + a_2 E_2(\omega)$

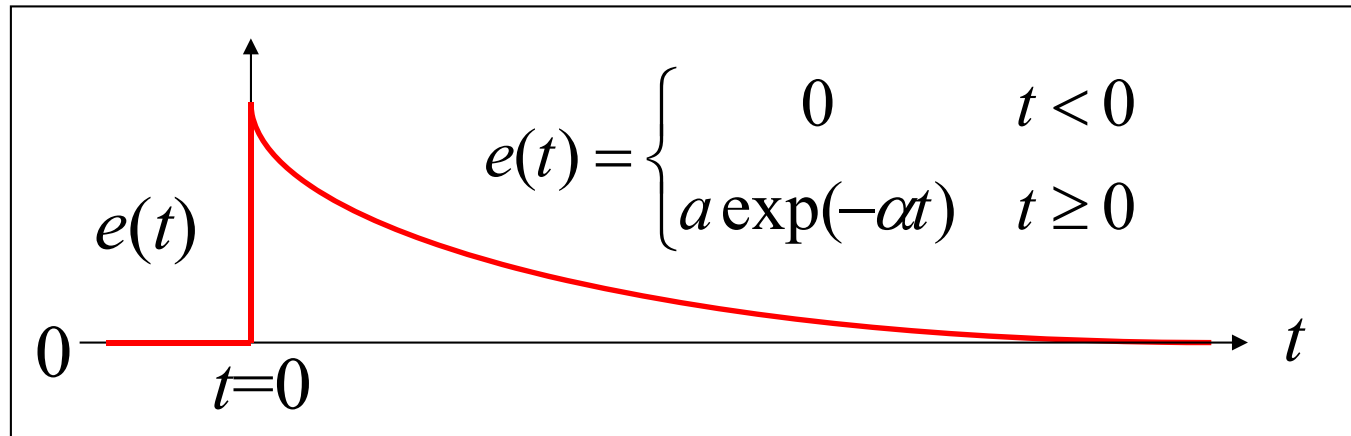
微分 $\Rightarrow \mathcal{F}\left[\frac{d\{e(t)\}}{dt}\right] = j\omega E(\omega)$

積分 $\Rightarrow \mathcal{F}\left[\int e(t)dt\right] = \frac{1}{j\omega} E(\omega)$

遅延 $\Rightarrow \mathcal{F}[e(t - \tau)] = \exp(-j\omega\tau) E(\omega)$

ラプラス演算子:

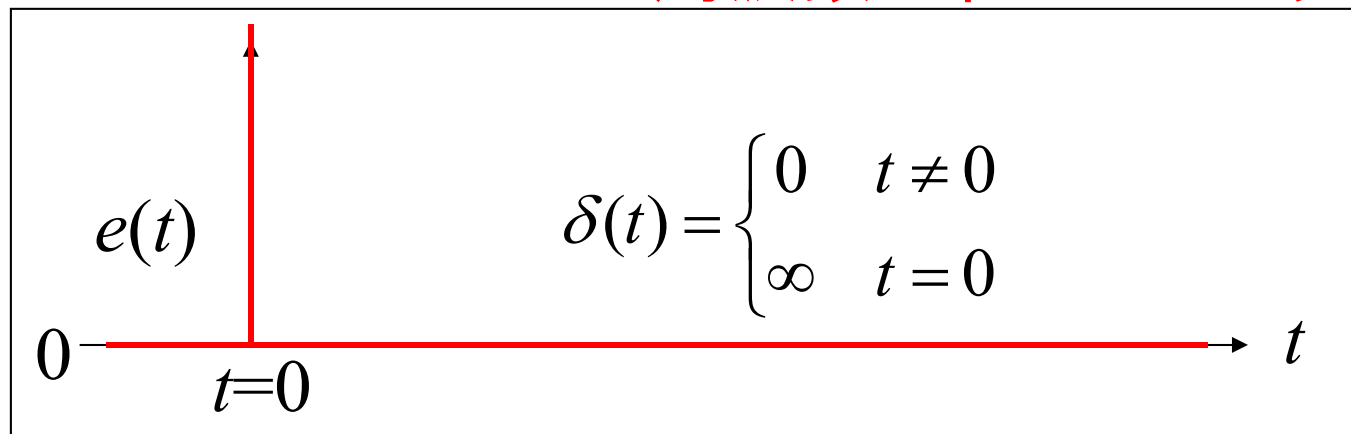
$$s=j\omega$$



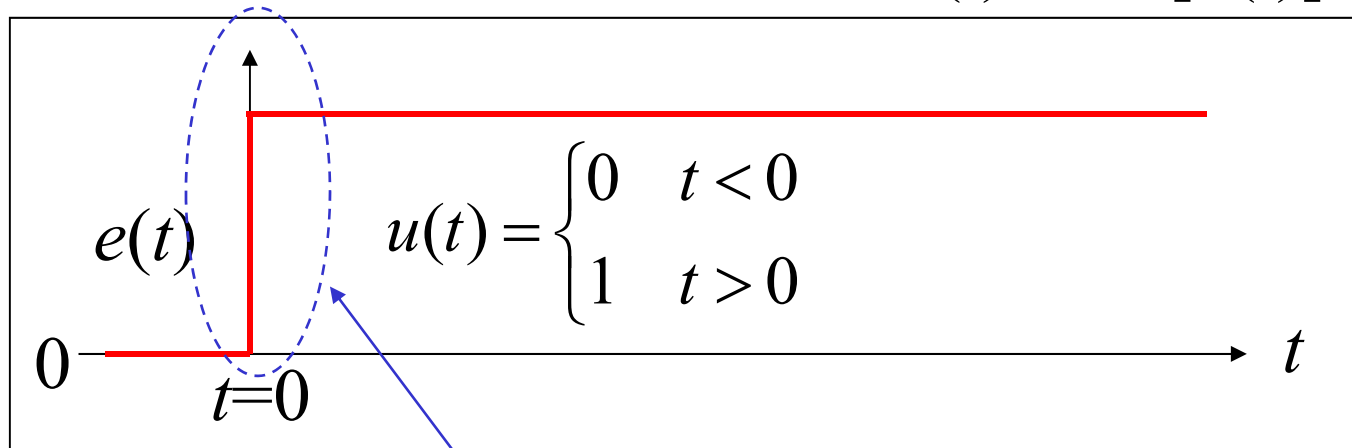
$$F[e(t)] = \int_0^{+\infty} a \exp\{-(j\omega + \alpha)t\} dt = \frac{a}{j\omega + \alpha} \left(= \frac{a}{s + \alpha} \right)$$

$\alpha \rightarrow \infty, a/\alpha \rightarrow 1$ の時 ⑨ インパルス関数 $\delta(t) \Rightarrow F[\delta(t)] = 1$

全周波数にわたってフラット、同相

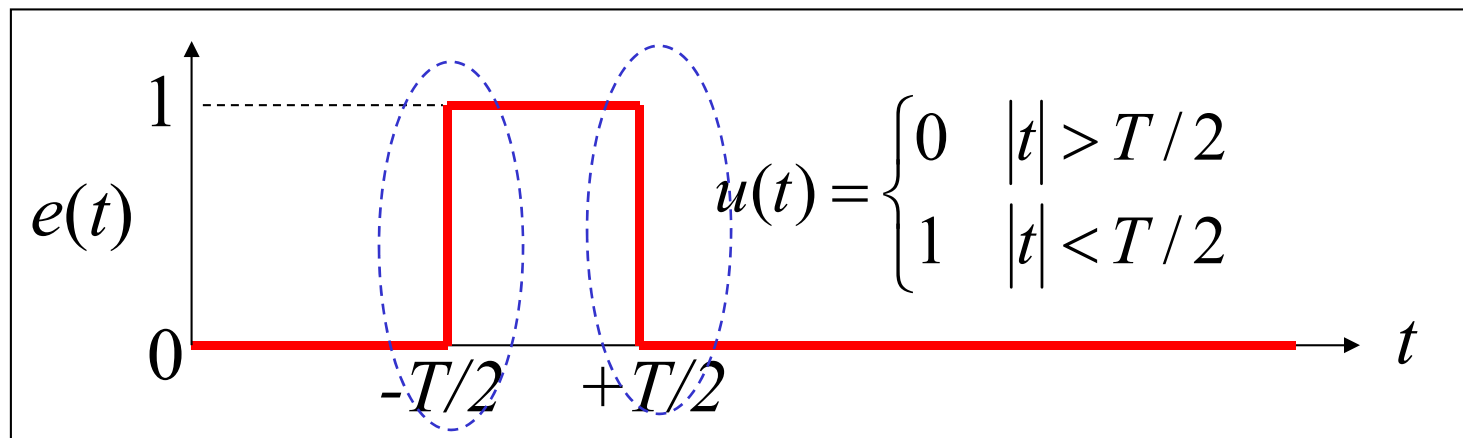


$a \rightarrow 1, \alpha \rightarrow 0$ の時 ⑧ ステップ関数 $u(t) \Rightarrow F[u(t)] = (j\omega)^{-1}$



この部分に高周波成分含まれる

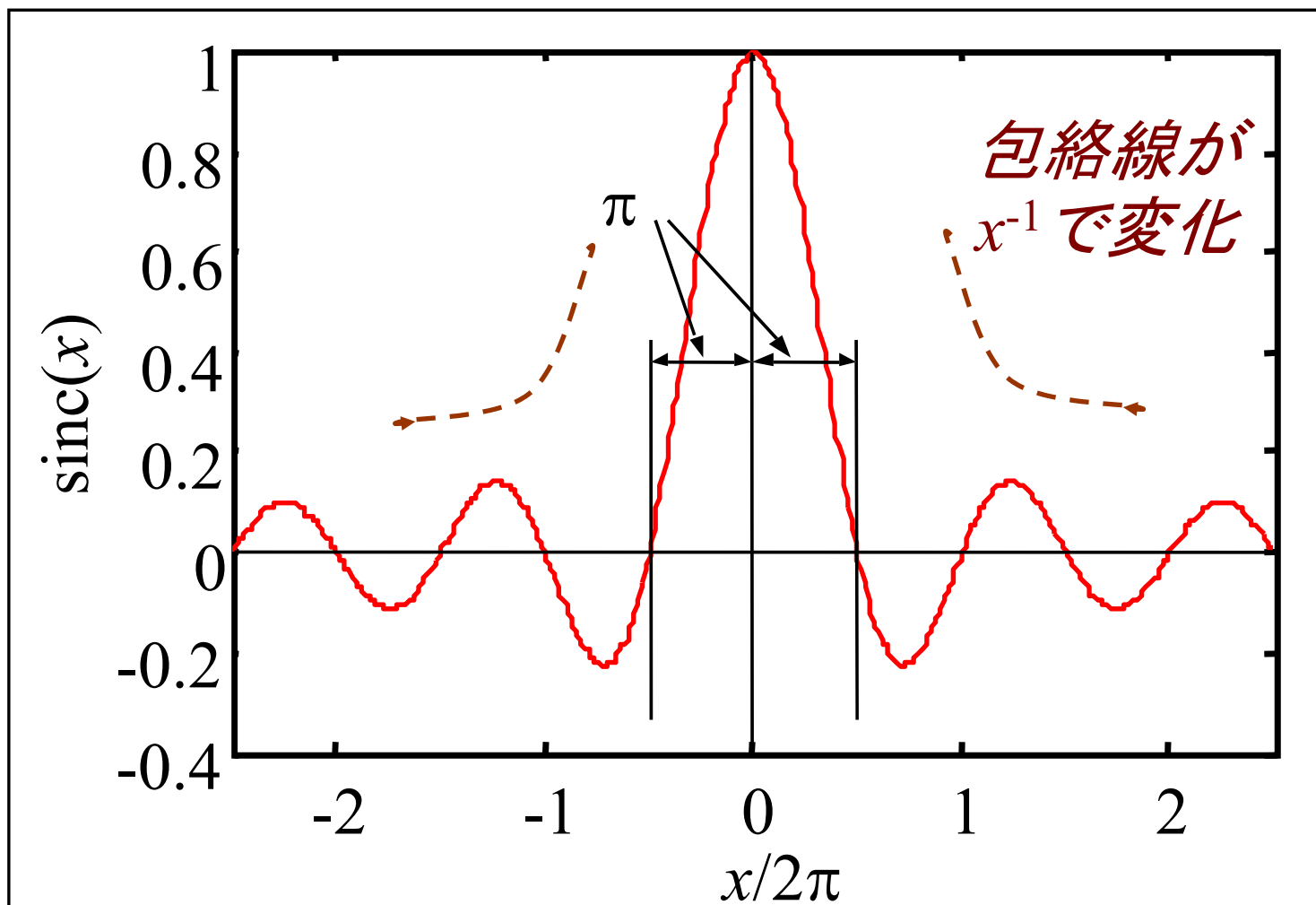
単一パルス



$$F[e(t)] = F[u(t + T/2)] - F[u(t - T/2)] = T \text{sinc}(\omega T / 2\pi)$$

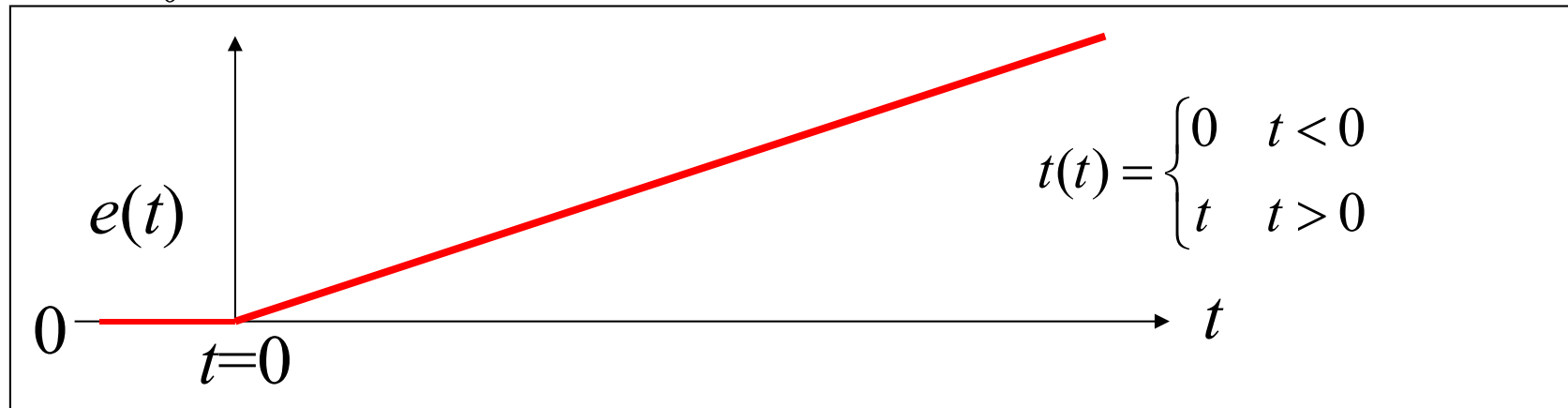
ここで $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$

シンク関数

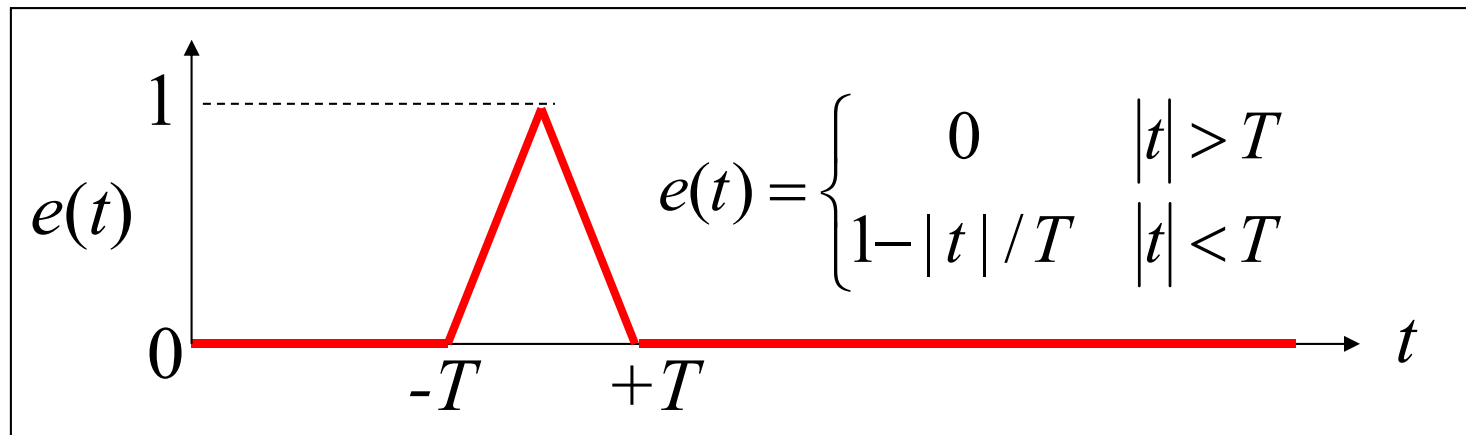


$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$t(t) = \int_0^t u(t) dt \Rightarrow \mathcal{F}[t(t)] = -\omega^{-2}$$



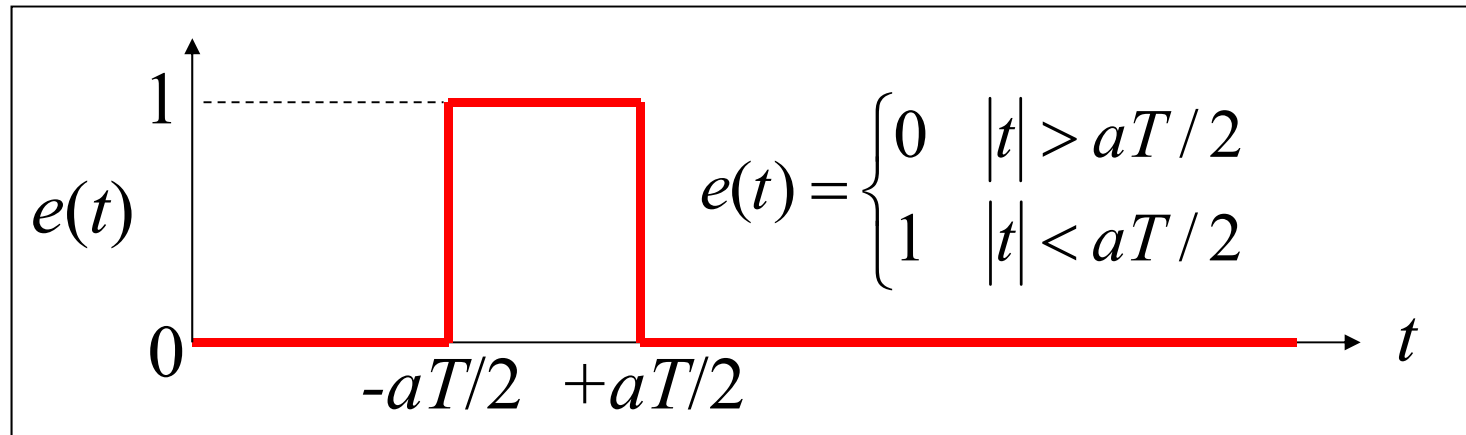
三角パルス



$$\mathcal{F}[e(t)] = T^{-1} \{ \mathcal{F}[t(t+T)] - 2\mathcal{F}[t(t)] + \mathcal{F}[t(t-T)] \} = T \text{sinc}^2(\omega T / 2\pi)$$

スケーリング $\Rightarrow \mathcal{F}[e(at)] = aE(\omega/a)$

単一パルスの例



$$\mathcal{F}[e(t)] = aT \operatorname{sinc}(a\omega T / 2\pi)$$

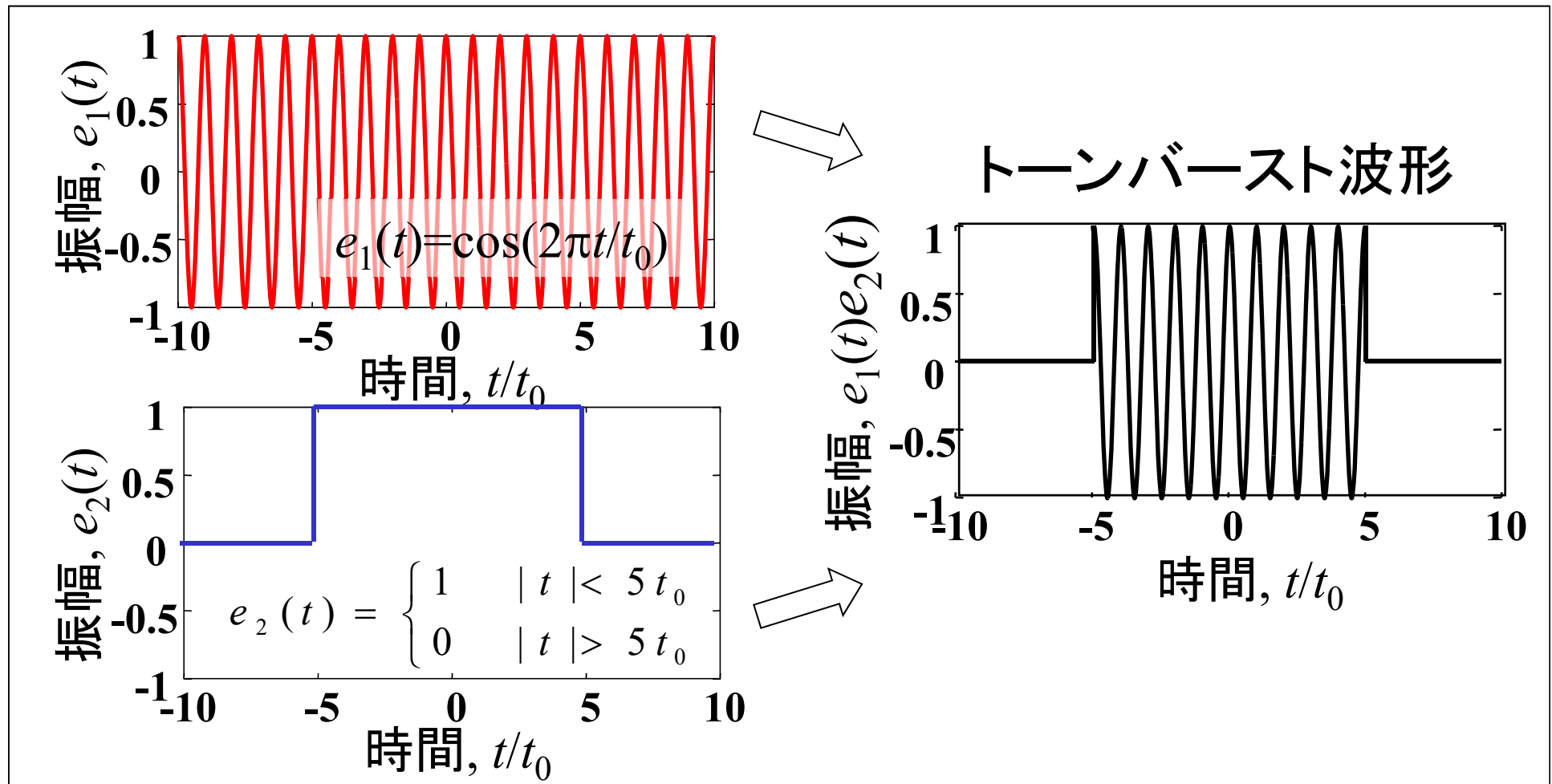
a の増加と共に

1. 直流成分の増加
2. 高周波成分の干渉によるリップル周期の短縮

$$\text{積} \Rightarrow \mathcal{F}[e_1(t)e_2(t)] = E_1(\omega) * E_2(\omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(\xi) E_2(\omega - \xi) d\xi$$

畳み込み積分(コンボリューション)

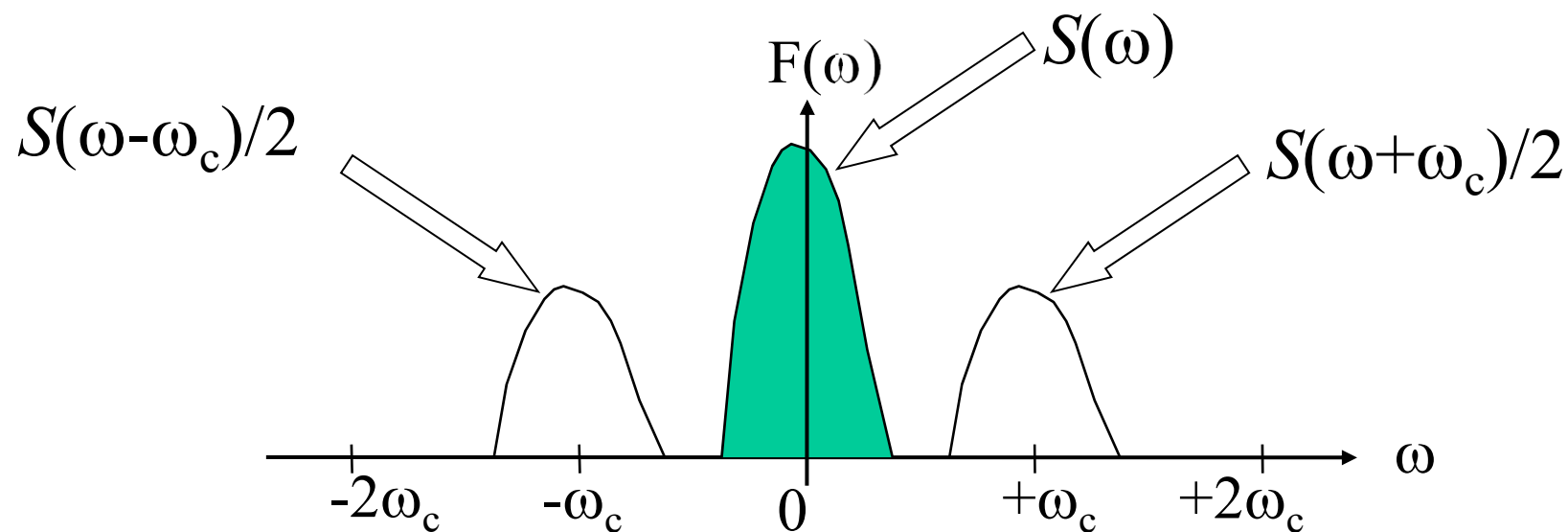


$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \exp(+j\omega t) d\omega$$

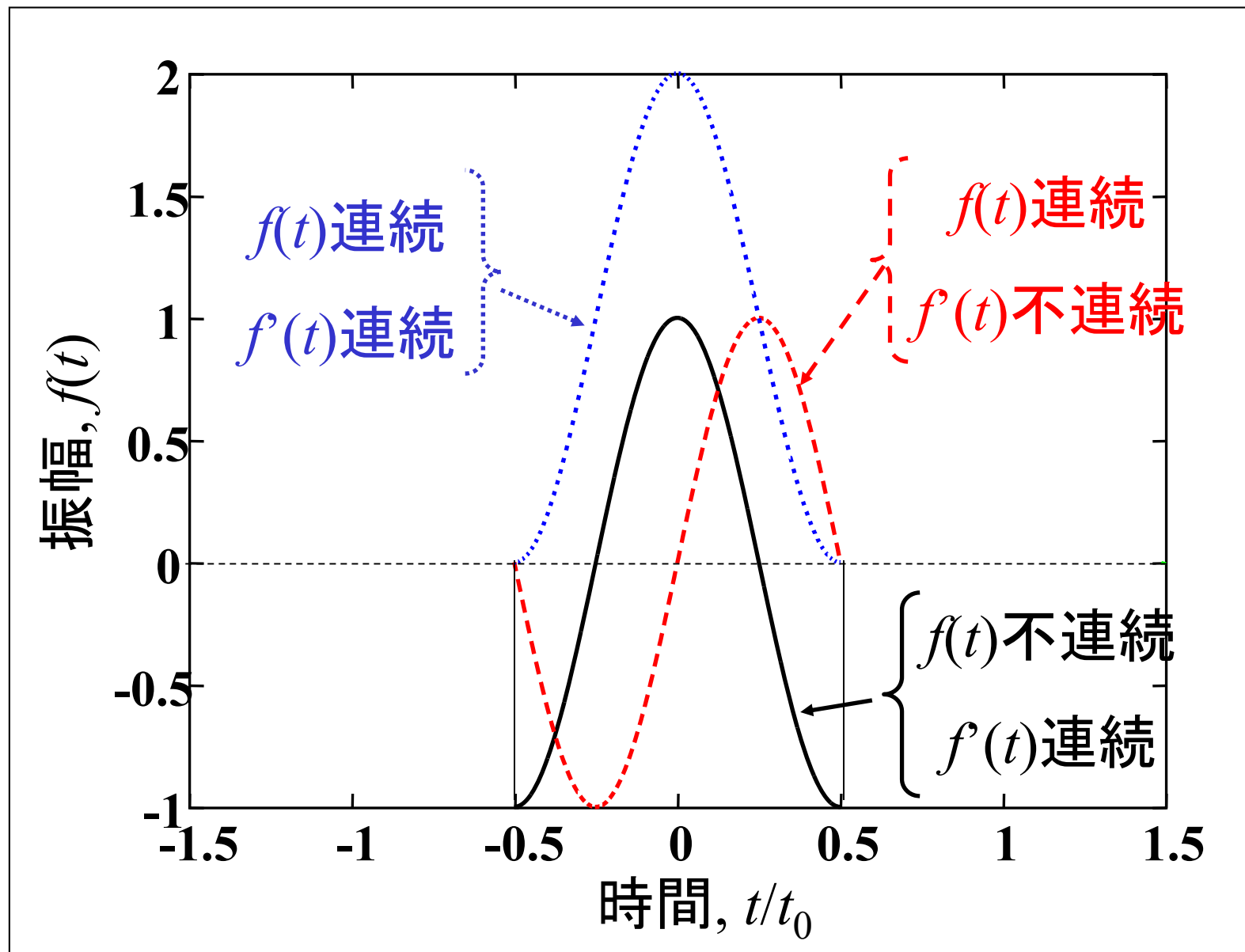
$c(t)=\cos(\omega_c t)$ を乗ずると

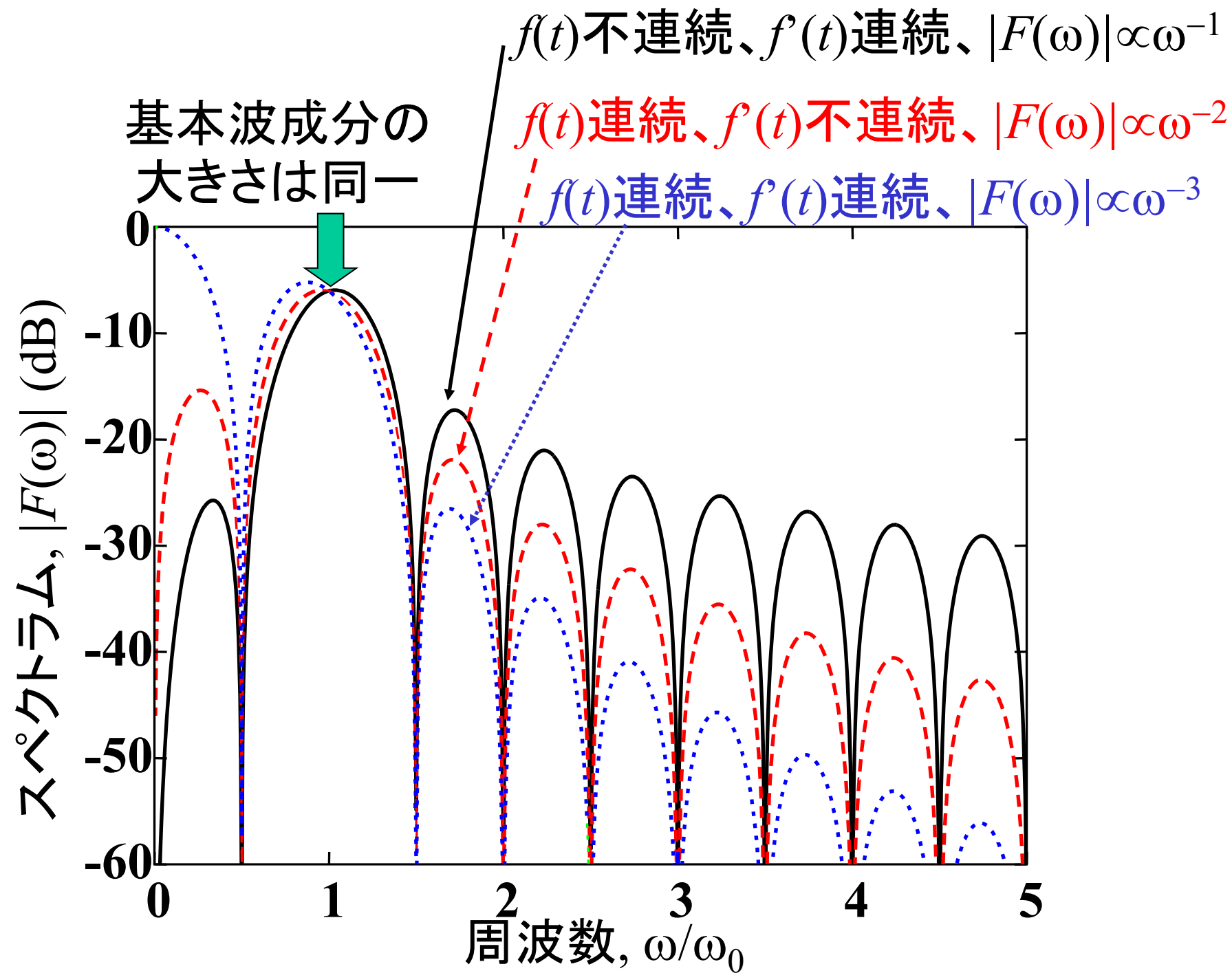
$$s(t)c(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \exp\{+j(\omega + \omega_c)t\} d\omega$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \exp\{+j(\omega - \omega_c)t\} d\omega$$



単波交流パルスの波形





周期関数のフーリエ変換

$e(t) = \cos(\omega_c t)$ の時

$$\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2} \{ \exp(+j\omega_c t) + \exp(-j\omega_c t) \}$$

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\omega t) dt$$

の関係より

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \exp(-j\omega t) dt = \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

周期関数のフーリエ変換

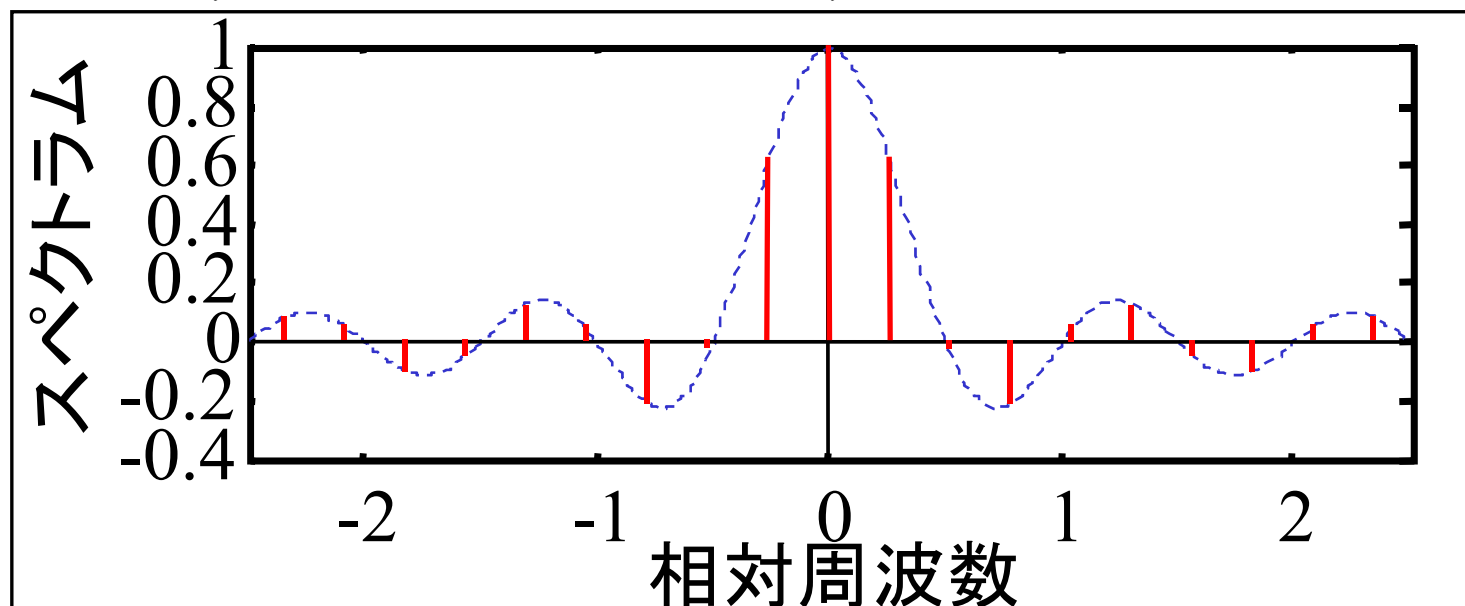
$e(t) = e(t - T)$ の時

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \exp(-j\omega t) dt = U(\omega) \int_{-T/2}^{+T/2} e(t) \exp(-j\omega t) dt$$

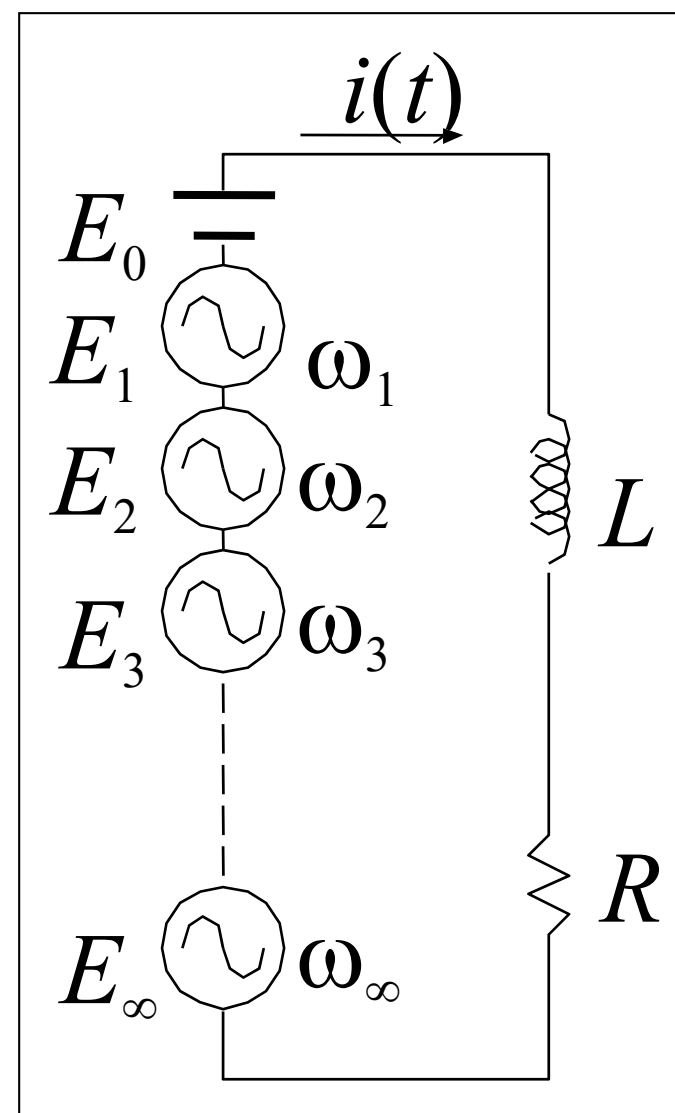
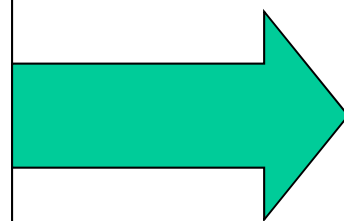
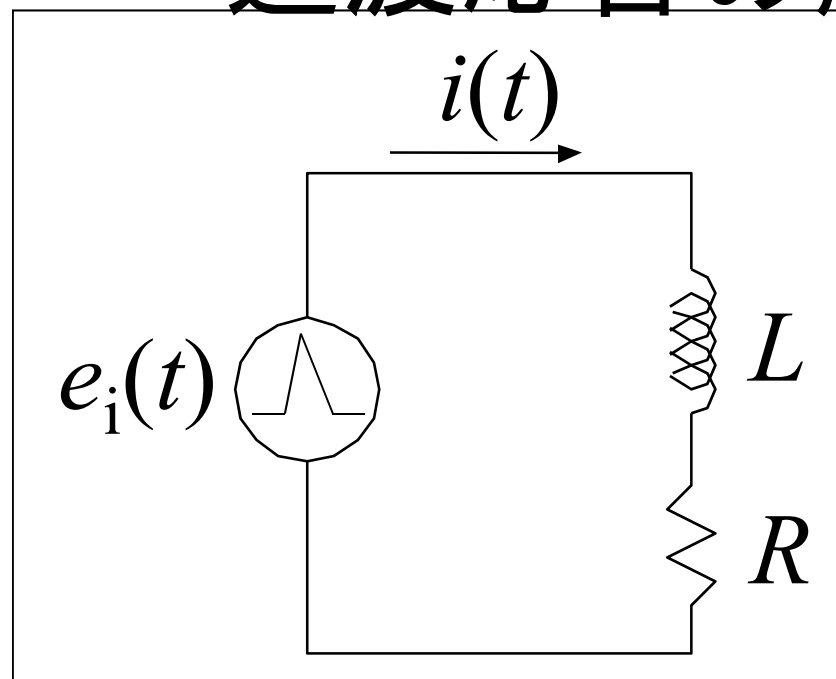
ここで

単一周期のスペクトラム

$$U(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(jn\omega T) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2k\pi / T)$$



過渡応答の解析例



$$Z(\omega) = R + j\omega L$$

(1) 入力信号のフーリエ変換

$$E_i(\omega) = \mathcal{F}[e_i(t)]$$

(2) 各信号源による応答の和

$$i(t) = \mathcal{F}^{-1}[Z(\omega)^{-1} E_i(\omega)]$$

過渡応答の解析例

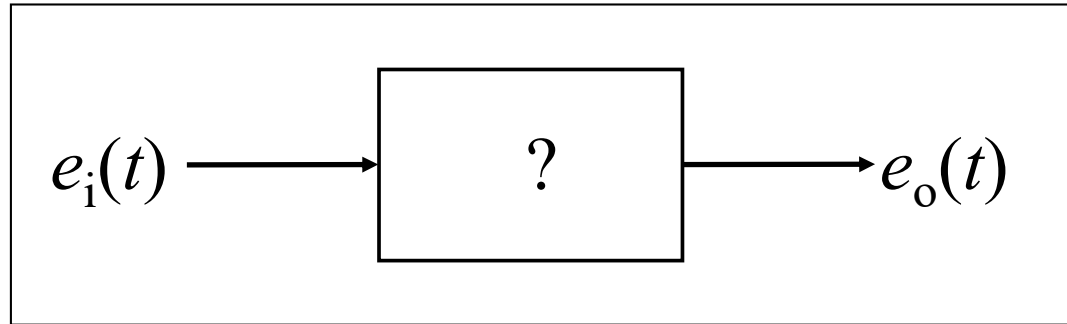
$$e_i(t) = E_0 u(t) \quad \text{の時} \quad E_i(\omega) = \frac{E_0}{j\omega}$$

$$\frac{1}{j\omega(R + j\omega L)} = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{j\omega + R/L} \right] \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{E_0}{j\omega(R + j\omega L)} \right] \\ &= \frac{E_0}{R} \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{j\omega} \right] - \frac{E_0}{R} \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{j\omega + R/L} \right] \\ &= \frac{E_0}{R} u(t) [1 - \exp(-Rt/L)] \end{aligned}$$

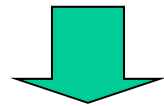
$j\omega \Leftrightarrow s$ とすれば、ラプラス変換による解析と同一

線形システム $f(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$



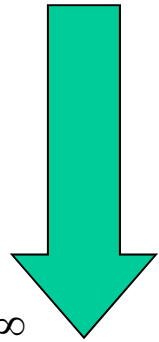
システム伝達関数(周波数特性)

$$H(\omega) = \frac{E_o(\omega)}{E_i(\omega)} \quad : \text{各周波数毎の応答の和}$$



$$e_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) E_i(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

$$e_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) E_i(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$



$$E_i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_i(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau$$

を代入すると

$$e_o(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e_i(\tau) d\tau$$

: 畳み込み積分

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e_i(t-\tau) d\tau$$

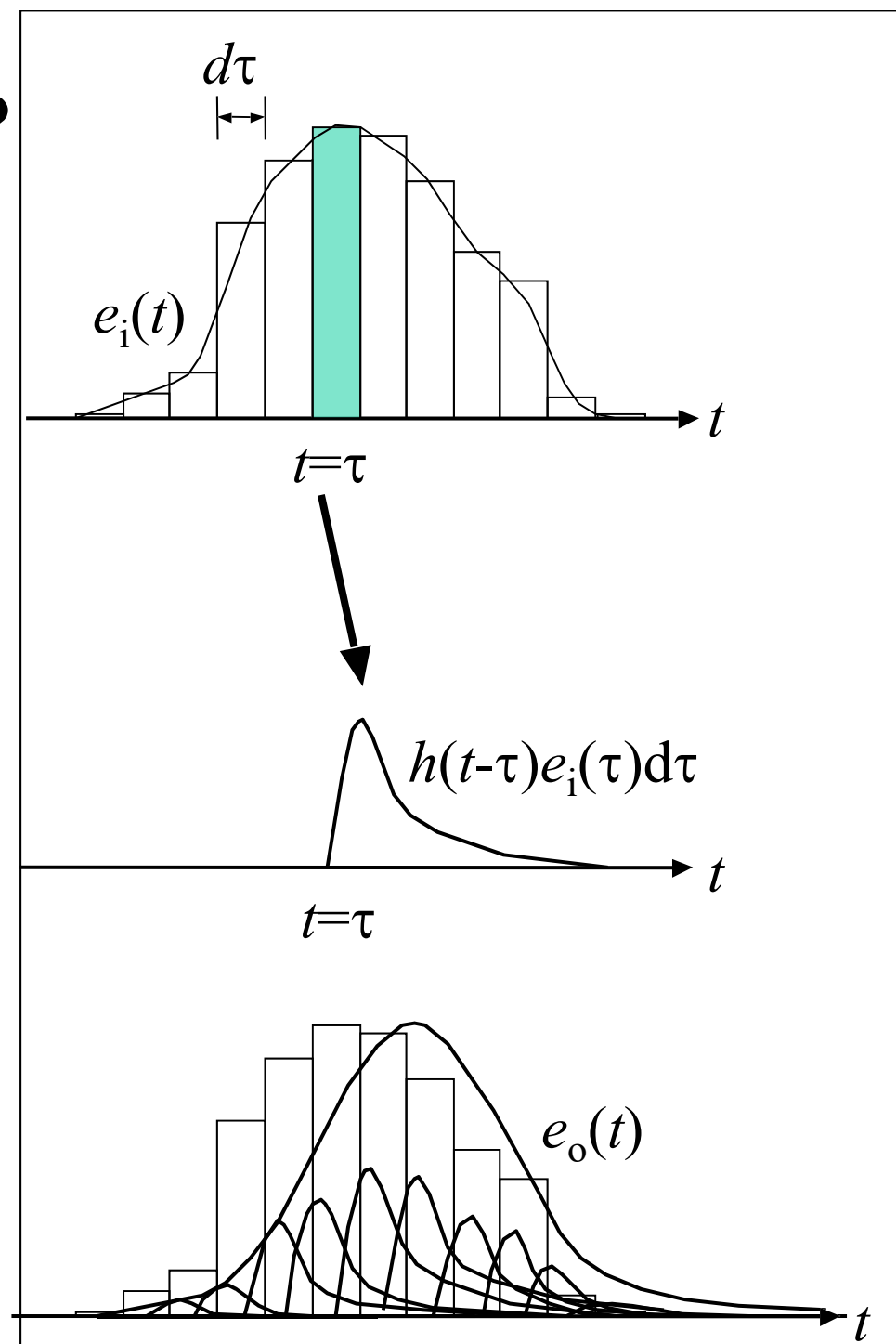
$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad : \text{インパルス応答}$$

インパルス関数 $\delta(t)$ が入力された時の応答

畳み込み積分とは？

$$e_o(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e_i(\tau)d\tau$$

- 時間領域における入力信号の分割
- インパルス応答の重ね合わせ



極の配置と時間応答

$$H(\omega) = c \frac{\prod_{n=1}^{N_0} (j\omega - j\omega_n^{(0)})}{\prod_{n=1}^{N_\infty} (j\omega - j\omega_n^{(\infty)})}$$

$$h(t) = \sum_{m=1}^{N_\infty} c_m \exp(j\omega_m t) \quad \text{各極の応答の和}$$

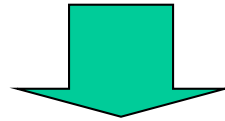
$$\text{ここで} \quad c_m = j \operatorname{Res}_{\omega=\omega_m^{(\infty)}} [H(\omega)] = c \frac{\prod_{n=1}^{N_0} (j\omega_m^{(\infty)} - j\omega_n^{(0)})}{\prod_{n=1, n \neq m}^{N_\infty} (j\omega_m^{(\infty)} - j\omega_n^{(\infty)})}$$

- t が小さい時 $\Rightarrow |c_m|$ の大きな成分が支配的
- t が大きい時 $\Rightarrow \operatorname{Im}(\omega_m)$ の小さな成分が支配的

伝達関数における極と零点の配置

$$H(\omega) = c \frac{\prod_{n=1}^{N_0} (j\omega - j\omega_n^{(0)})}{\prod_{n=1}^{N_\infty} (j\omega - j\omega_n^{(\infty)})}$$

$\omega_n^{(\infty)}$: 極 $\omega_n^{(0)}$: 零点
 N_∞ : 極の数 N_0 : 零点の数
 c : 実定数



$$\log |H(\omega)| = \log c + \sum_{n=1}^{N_0} \log |\omega - \omega_n^{(0)}| - \sum_{n=1}^{N_\infty} \log |\omega - \omega_n^{(\infty)}|$$

$$\arg [H(\omega)] = \arg [c] + \arg [j\omega - j\omega_0^{(\infty)}] - \arg [j\omega - j\omega_n^{(\infty)}]$$

ボード線図で見れば、極と零点の寄与の和

複素共役な零点の寄与は位相のみに影響

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad : \text{インパルス応答}$$

- $h(t)$ は実数だから、 $H(-\omega) = H(\omega)^*$
- 因果律 (結果は入力より後) $h(t) = 0 \ (t < 0)$

$$\left. \begin{aligned} \Re[H(\omega)] &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Im[H(\xi)]}{\omega - \xi} d\xi \\ \Im[H(\omega)] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Re[H(\xi)]}{\omega - \xi} d\xi \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ヒルベルト変換対} \\ \cdot \text{実部が傾きが虚} \\ \text{数部に対応, 虚} \\ \text{数部の傾きが実} \\ \text{数部に対応} \end{array}$$

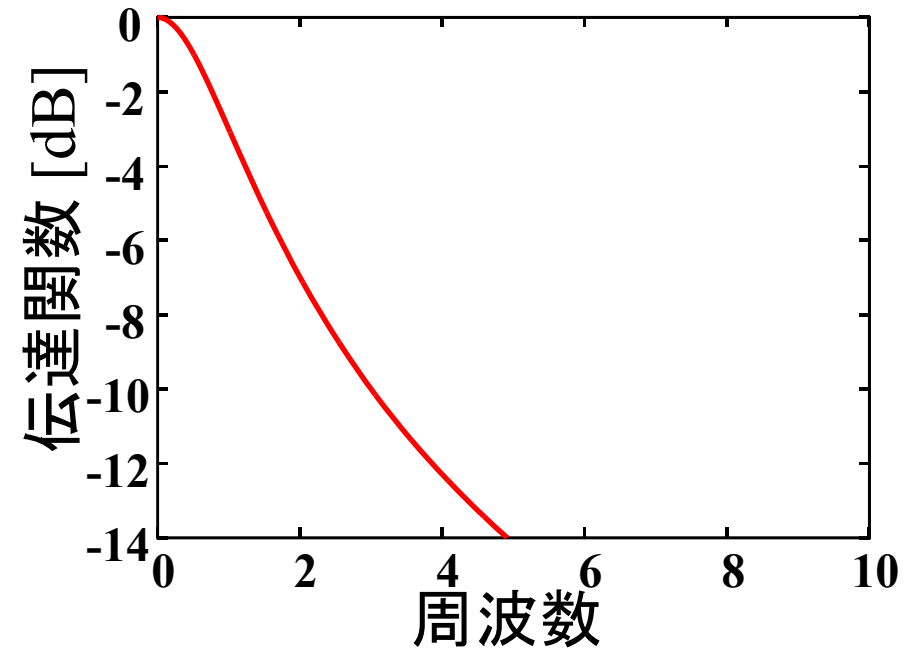
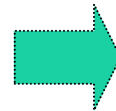
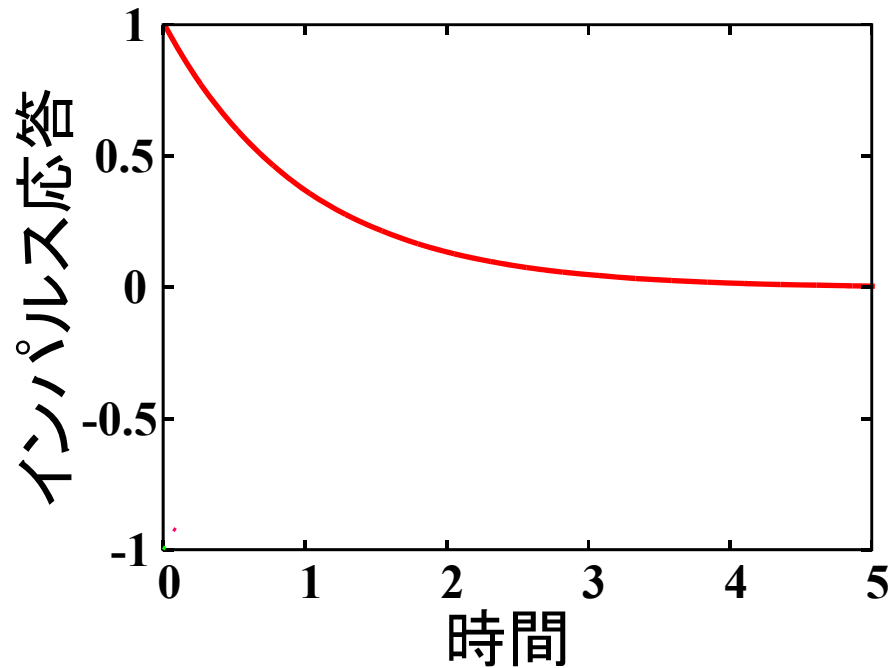
時間遅れ零の応答はこの関係に含まれず

システムの応答

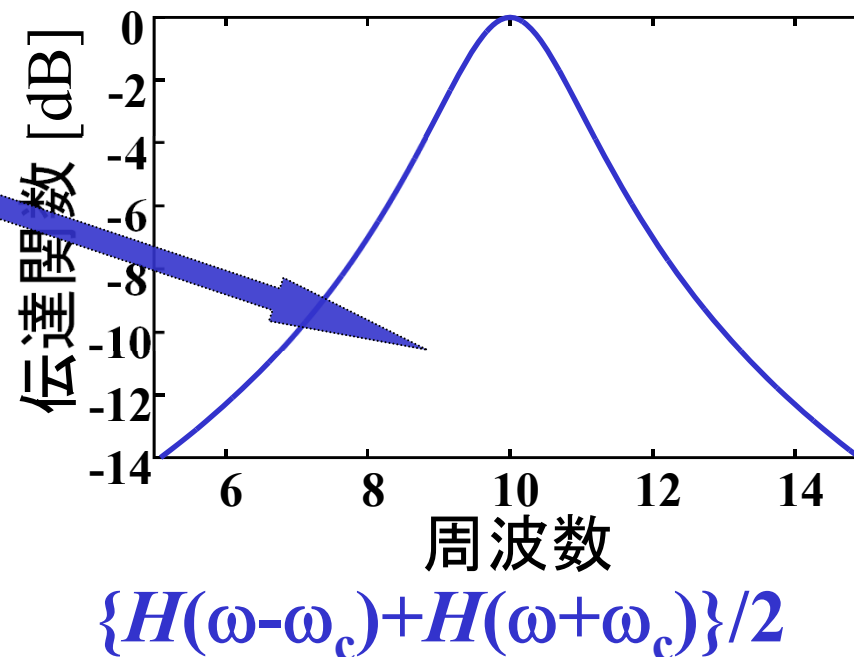
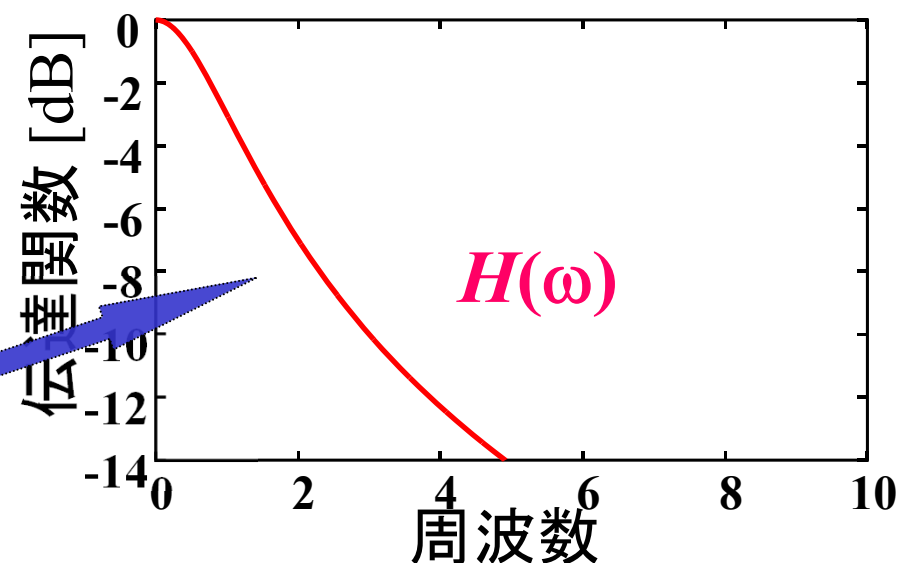
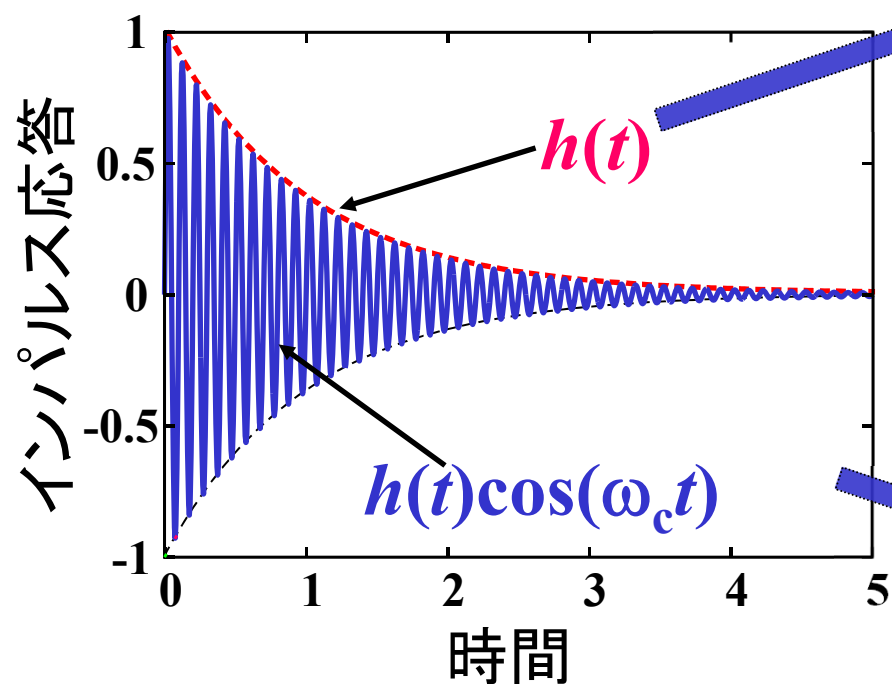
フーリエ変換

インパルス応答: $h(t)$ $\longleftrightarrow$ 周波数応答: $H(\omega)$

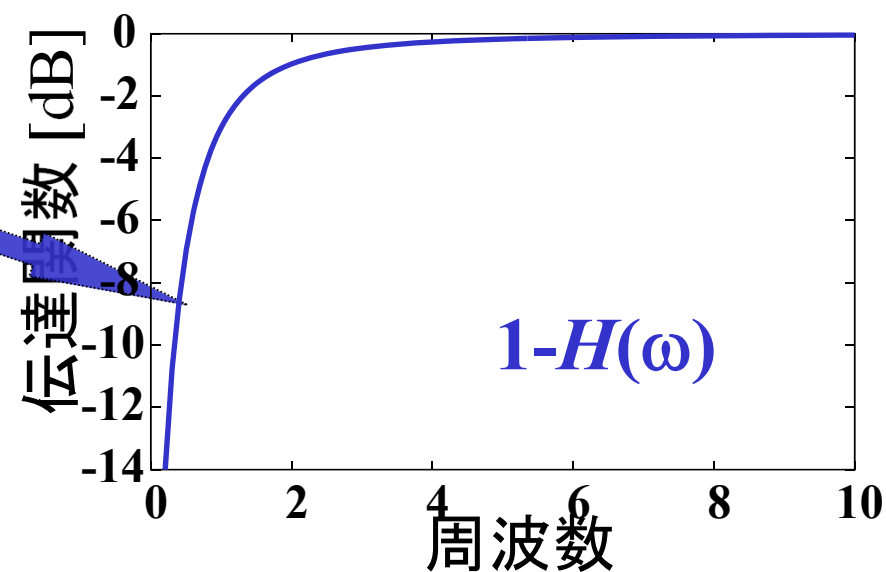
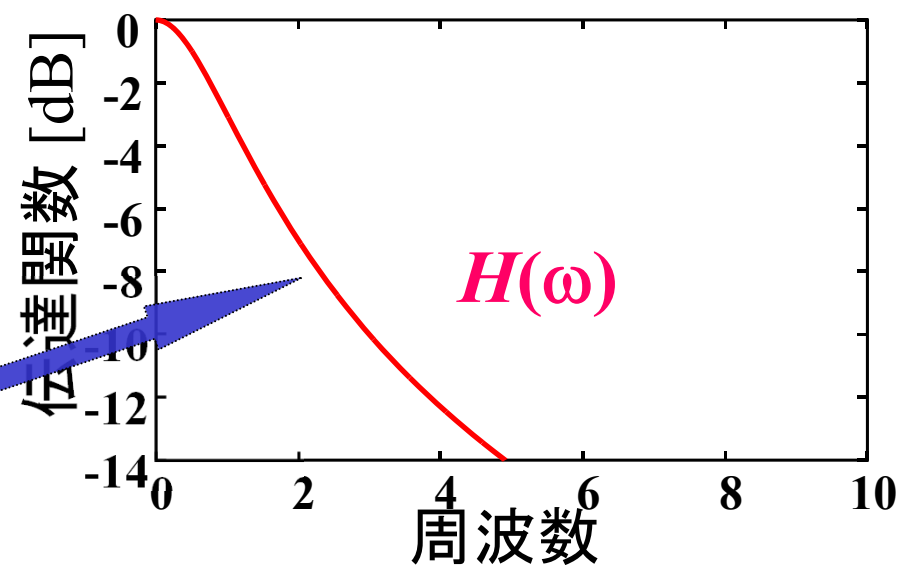
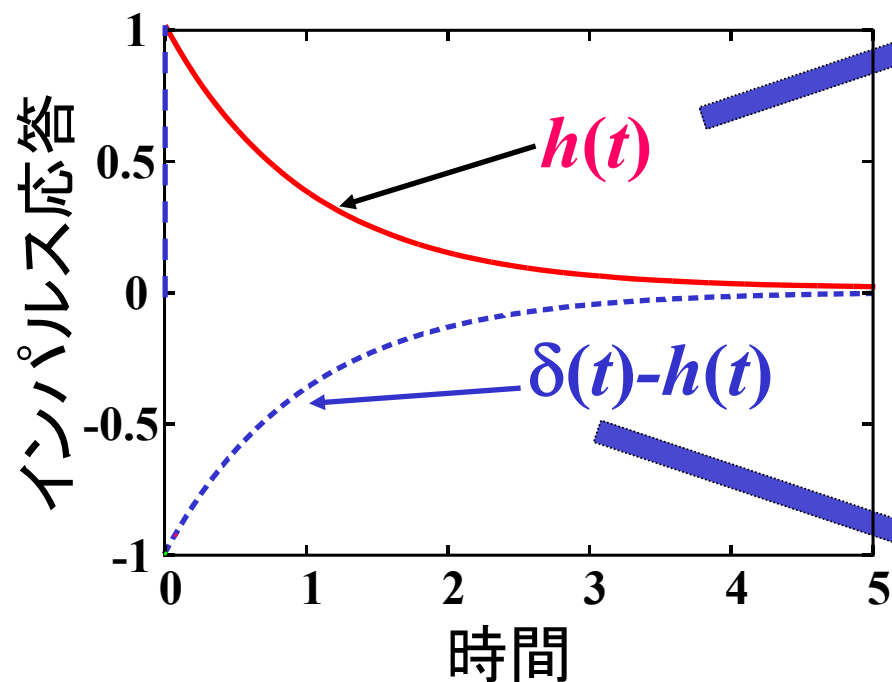
低域通過フィルタ(LPF)



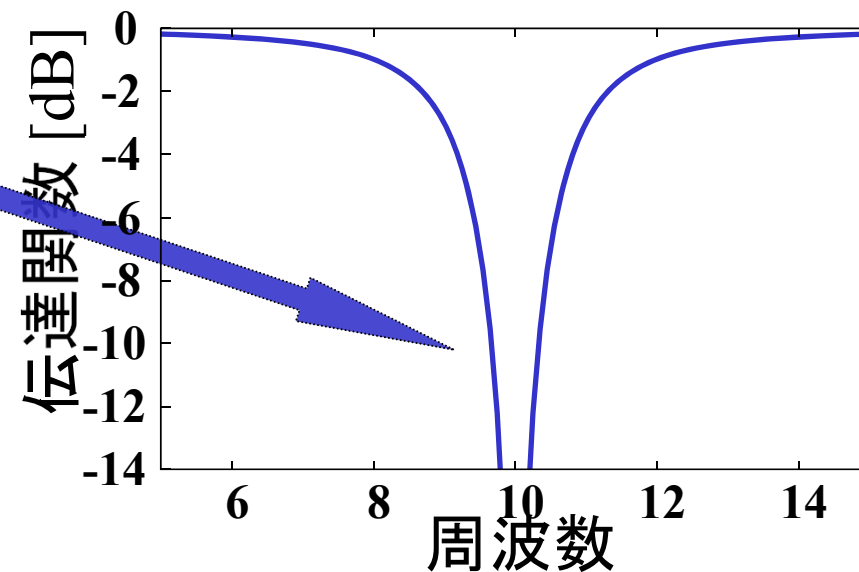
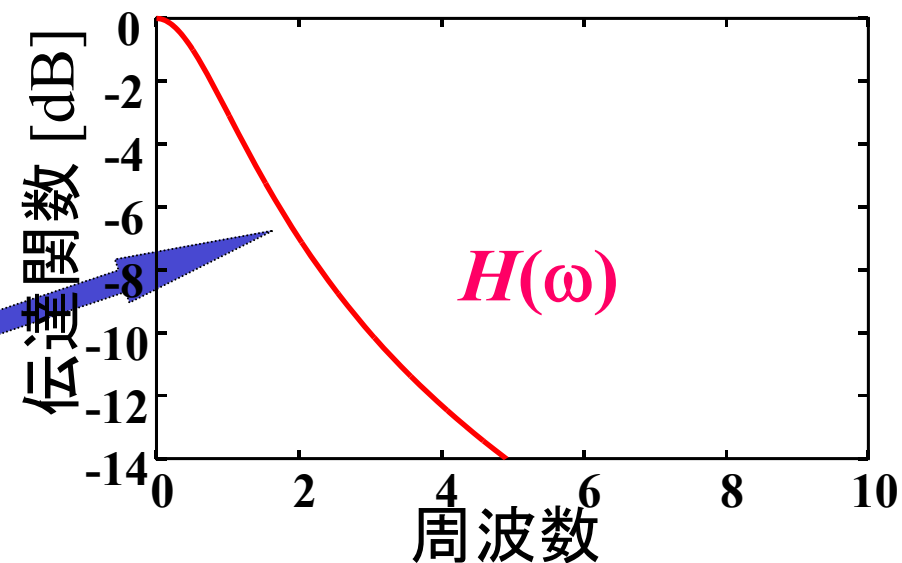
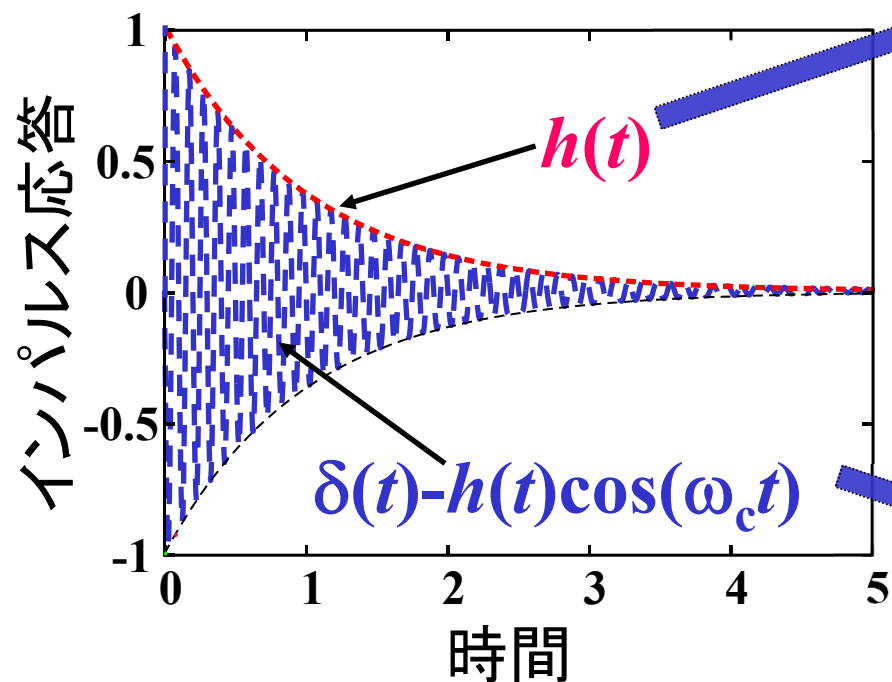
帯域通過フィルタ (BPF)の特性



高域通過フィルタ (HPF) の特性



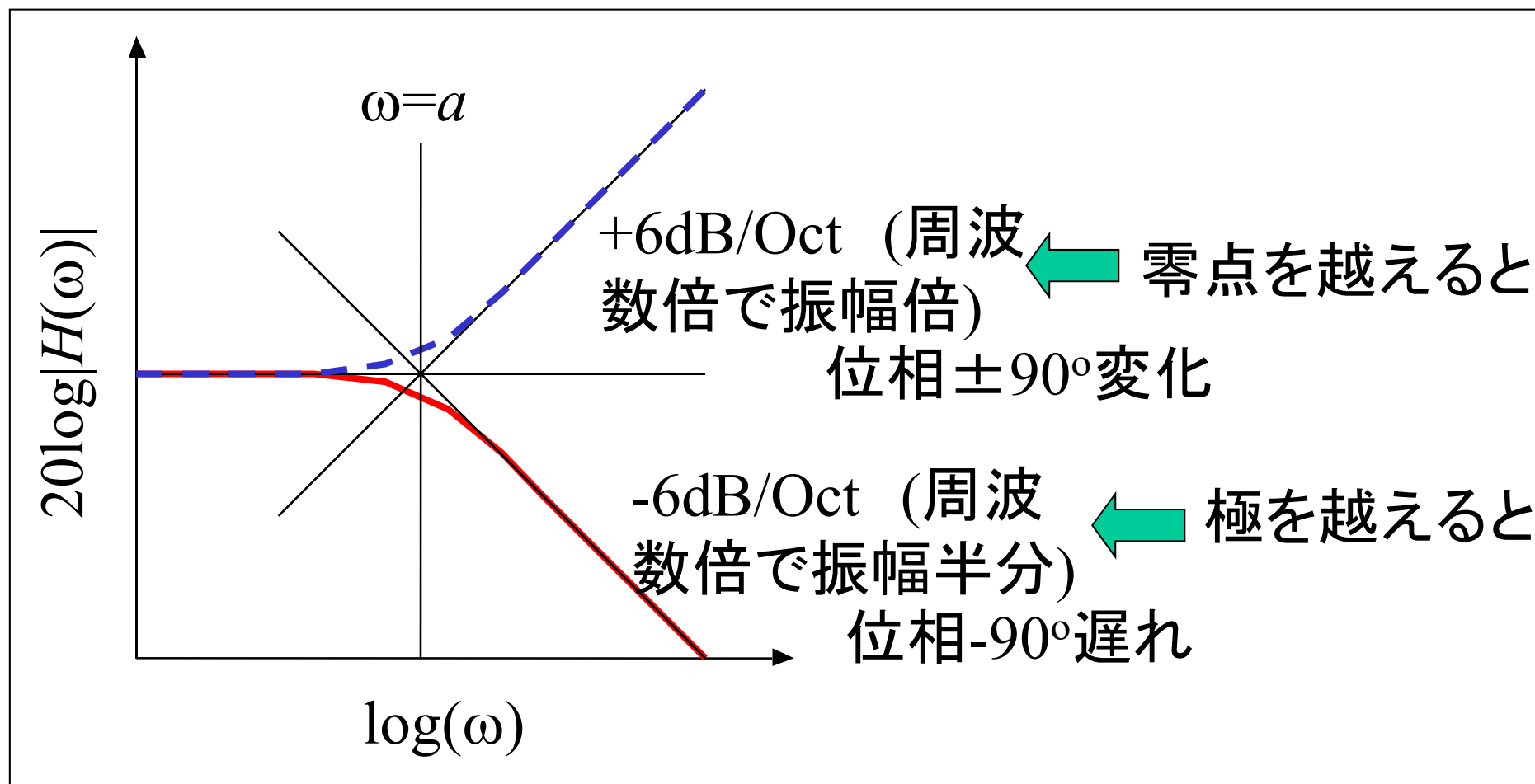
帯域除去フィルタ (BEF) の特性



$$1 - \{H(\omega - \omega_c) + H(\omega + \omega_c)\} / 2$$

虚数極の応答 $\omega_n = ja$ と表現

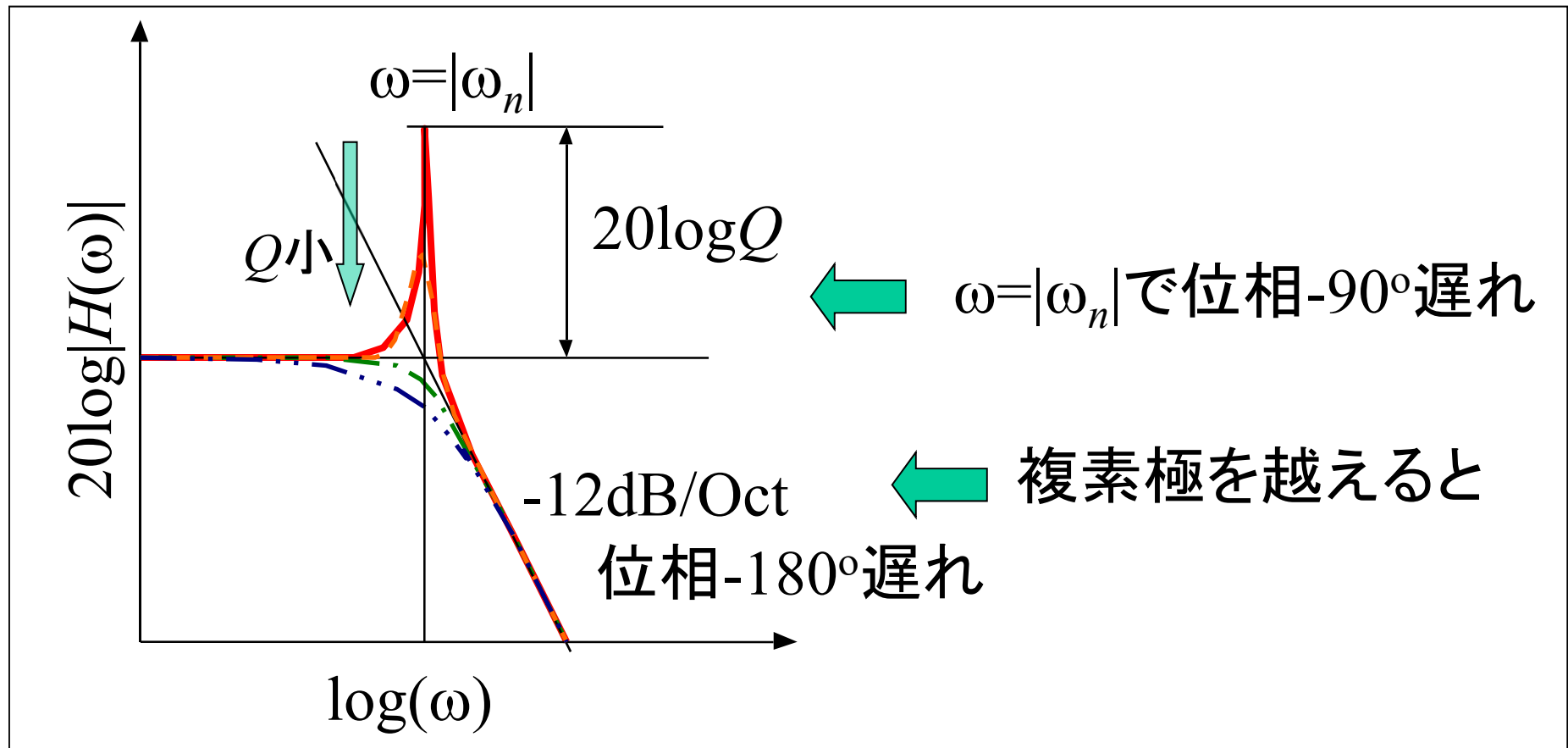
$$j\omega - j\omega_n \cong \begin{cases} a & (\omega \ll a) \\ j\omega & (\omega \gg a) \end{cases}$$



複素極の応答

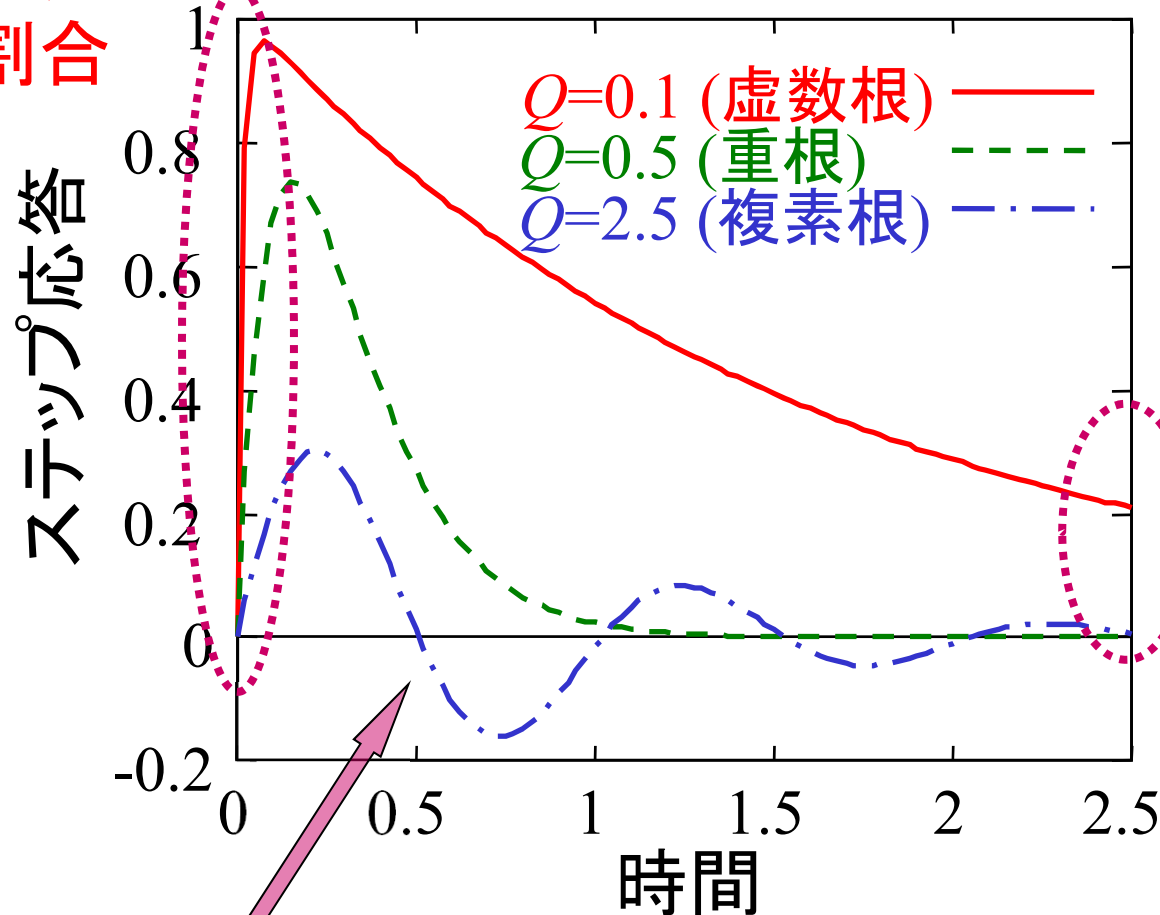
$Q=|\omega_n|/2\text{Im}[\omega_n]$ と表現

$$(j\omega - j\omega_n)(j\omega + j\omega_n^*) \cong \begin{cases} |\omega_n|^2 & (\omega \ll |\omega_n|) \\ jQ^{-1}|\omega_n|^2 & (\omega = |\omega_n|) \\ -\omega^2 & (\omega \gg |\omega_n|) \end{cases}$$



極配置と時間応答の関係

高周波成分
通過の割合

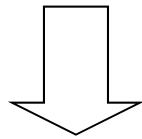


直流成分
不通過

複素極のピークにより振動が発生

理想フィルタは実現可能？

$$H(\omega) = \begin{cases} \exp(-j\omega\tau) & (|\omega| < \omega_0) \\ 0 & (|\omega| > \omega_0) \end{cases}$$



インパルス応答

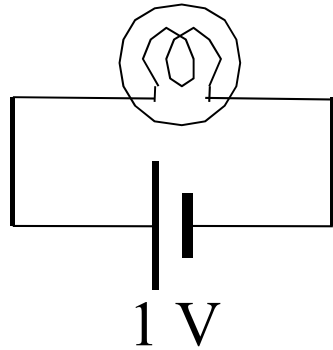
$$h(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}[\omega_0(t - \tau) / 2\pi]$$

- $h(t) \neq 0$ ($t < 0$)
- $\tau \rightarrow \infty$ では遅延時間無限

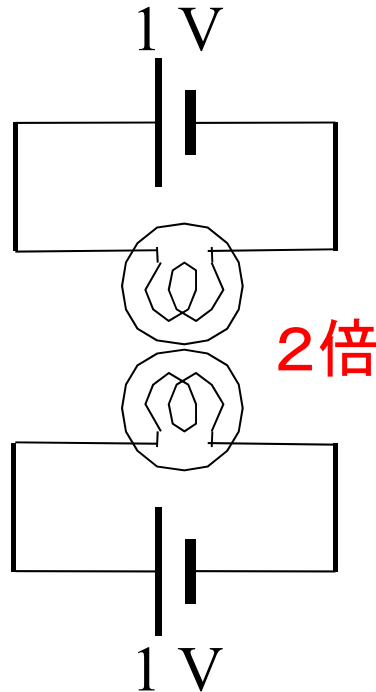
実現不可能

- 通過域変動発生
- 帯域外変動発生
- 有限の遷移帯域幅

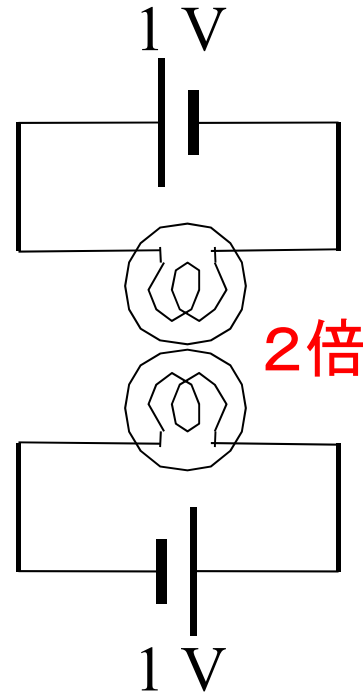
信号の直交性($\Leftrightarrow$ 相関)



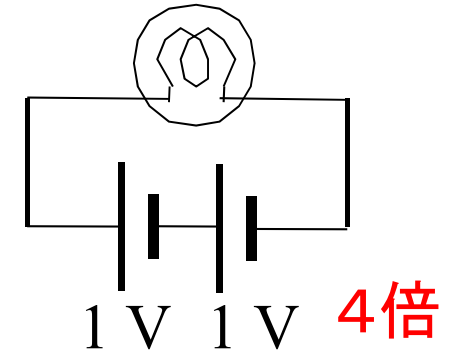
(a) 電池1個、
電球1個



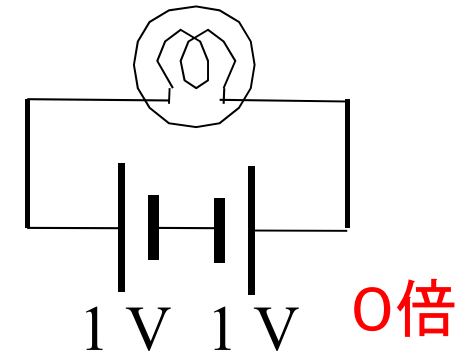
(b) 電池2個、
電球2個



(c) 電池2個、
電球2個



(d) 電池1個、
電球1個



(e) 電池1個、
電球1個

- 電池からの電流は干渉(相関有り)
- 電球の光は直交(相関無し)

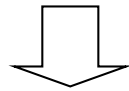
相関関数 $C_{mn}(\tau)$

$$C_{mn}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t) f_n(t - \tau) dt$$

$f_m(t) = f_n(t)$ の時 $\Rightarrow$ 自己相関関数

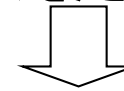
$f_m(t) \neq f_n(t)$ の時 $\Rightarrow$ 相互相関関数

2信号を同時に加えた時の仕事



$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_m(t) + f_n(t - \tau)]^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_m^2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(t) dt$$

2信号を別個に加えた時の仕事



$$+ 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t) f_n(t - \tau) dt$$



2信号の干渉による仕事

シュバルツの不等式

任意の実関数 $f_m(t)$ 、 $f_n(t)$ に対して

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_m(t) + \lambda f_n(t - \tau)]^2 dt \geq 0$$

展開

$$F(\lambda) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(t) dt + 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t) f_n(t - \tau) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f_m^2(t) dt \geq 0$$

判別式 $D \leq 0$

$$D = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t) f_n(t - \tau) dt \right]^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} f_m^2(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(t) dt \leq 0$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t) f_n(t - \tau) dt \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f_m^2(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(t) dt}$$

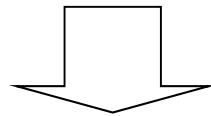
等号は $f_m(t) \propto f_n(t)$ の時に成立

Wiener-Khintchineの定理

$$\begin{aligned} C_{mn}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_m(\omega) F_n(-\omega) \exp(+j\omega\tau) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_m(\omega) F_n(\omega)^* \exp(+j\omega\tau) d\omega \end{aligned}$$

相関信号のフーリエ変換はエネルギースペクトラム

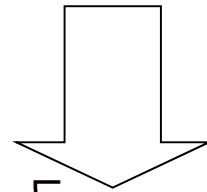
$$W(\omega) = F_m(\omega) F_n(\omega)^*$$



$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t) \exp(-j\omega t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) \exp(+j\omega t) dt$$

平均相関関数 $\hat{C}_{mn}(\tau)$

持続する関数の場合、エネルギーは無限



単位時間当り

$$\hat{C}_{mn}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[T^{-1} \int_{-T/2}^{+T/2} f_m(t) f_n(t - \tau) dt \right]$$

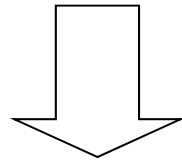
平均相関信号のフーリエ変換はパワースペクトラム
(単位時間当りのエネルギーースペクトラム)

$$\hat{C}_{mn}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{mn}(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega$$

$$P_{mn}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_{-T/2}^{+T/2} f_m(t) \exp(-j\omega t) dt \int_{-T/2}^{+T/2} f_n(t) \exp(+j\omega t) dt \right]$$

信号の実効値(Root-Mean-Square, RMS)

$$e_{\text{RMS}} = \sqrt{\hat{C}(0)} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \left[T^{-1} \int_{-T/2}^{+T/2} e(t)^2 dt \right]}$$

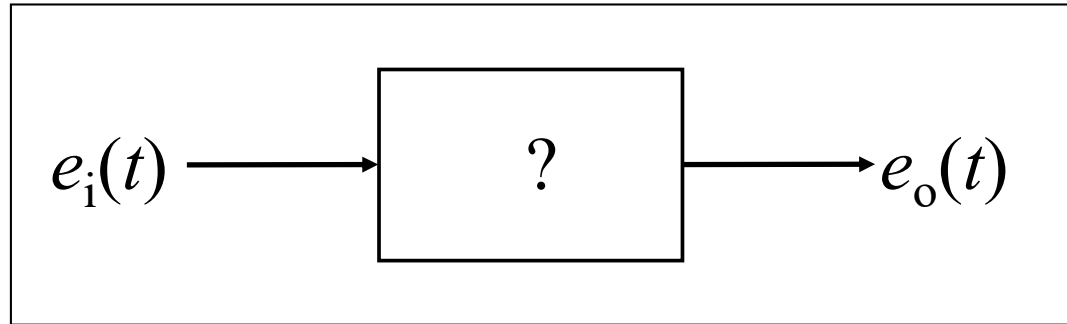


パワースペクトラムを利用して

$$e_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) d\omega}$$

線形システム

: 各周波数毎の応答の和

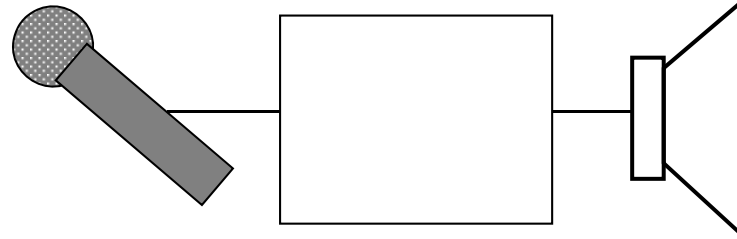


$$H(\omega) = \frac{E_o(\omega)}{E_i(\omega)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} W_o(\omega) = |H(\omega)|^2 W_i(\omega) \\ P_o(\omega) = |H(\omega)|^2 P_i(\omega) \end{cases}$$

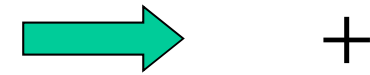
波形が不明でも回路応答の計算可能

干渉性(相関)が無いと

カラオケでAさんとBさんが2人で一緒に歌ったら？



Aさんが単独に歌った時の出力

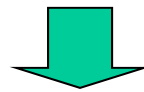


+

Bさんが単独に歌った時の出力

熱(白色雑音): どの信号とも(自分自身とも)相関無

自分自身との相関 $\propto$ スペクトラムの幅



雑音のスペクトラムは全ての周波数にわたって平坦

周波数資源を有効に利用すると雑音の様に聞こえる
(例): Faxの通信音

白色雑音の性質＝干渉性(相関)が無

- パワースペクトラムは平坦($P(\omega)=P_N/2$)

- 雑音電力は占有帯域幅に比例

$$e_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{-\omega_w}^{+\omega_w} P_N d\omega} = \sqrt{\frac{\omega_w P_N}{2\pi}}$$

- 雑音同士の加算はパワースペクトラムの加算

- 位相はランダム

- 瞬時振幅は正規確率分布に従う

信号の振幅が確率密度に従えば

$$e_{\text{RMS}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx}$$

時間的な平均と確率的な平均は一致

$p(x)$ がガウス分布の場合

$$e_{\text{RMS}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \exp(-x^2 / 2\sigma_N^2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} dx} = \sigma_N$$

σ_N : 標準偏差＝実効値

ガウス性白色雑音

(振幅はガウス分布、スペクトラムは白色)

(情報理論、通信工学で頻繁に利用)

$$P_N = \frac{2\pi}{\omega_w} \sigma_N^2$$

ガウス分布の確率密度関数 $p(x) = \frac{\exp(-x^2 / 2\sigma^2)}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

σ : 標準偏差

なお、 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$

