令和2年9月25日版

伝送工学

３．アナログーデジタル変換

千葉大学工学部

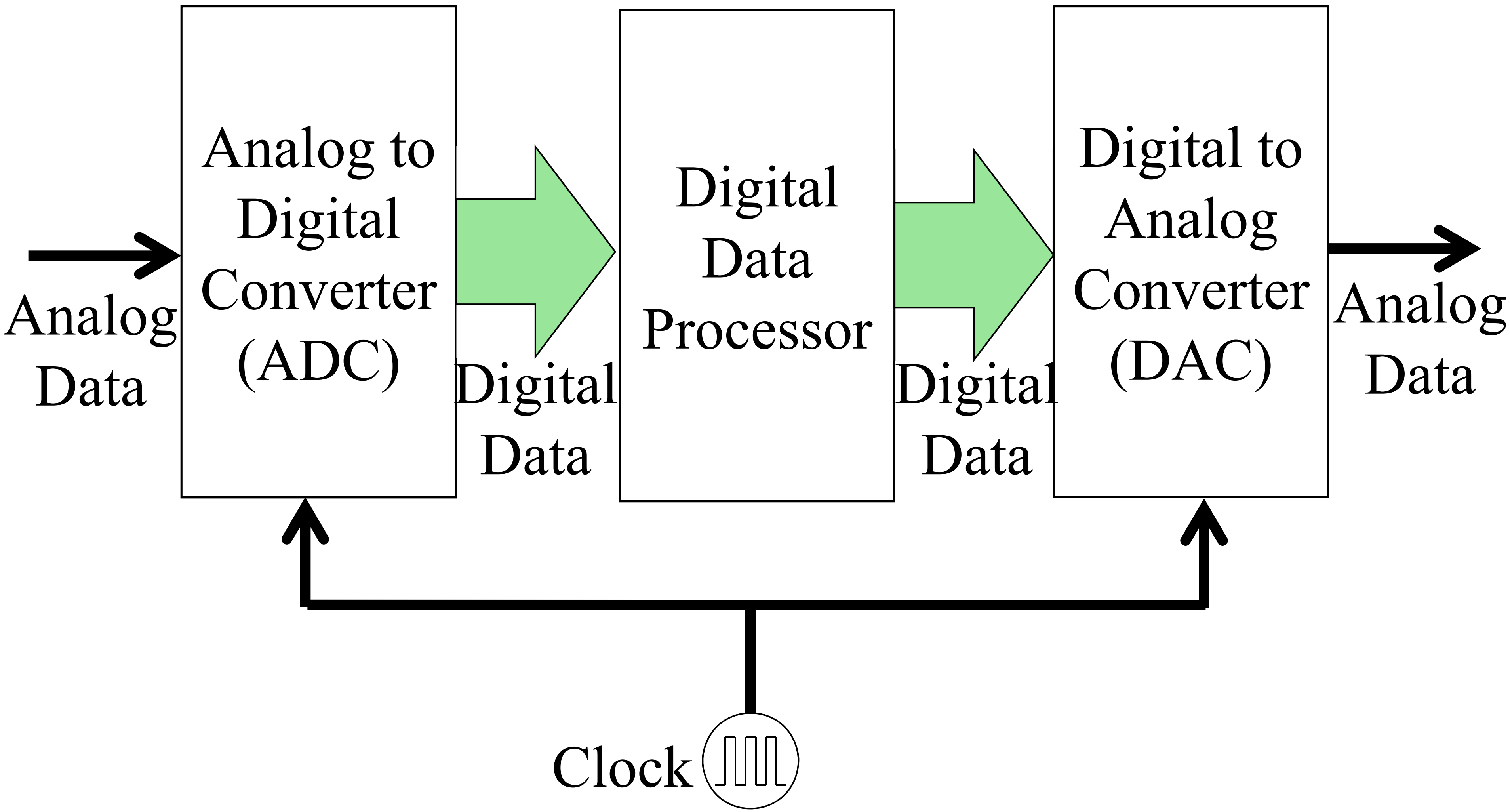
総合工学科電気電子工学コース

橋本研也

k.hashimoto@ieee.org

http://www.te.chiba-u.jp/lab/ken

信号処理の流れ (画像,音声等)



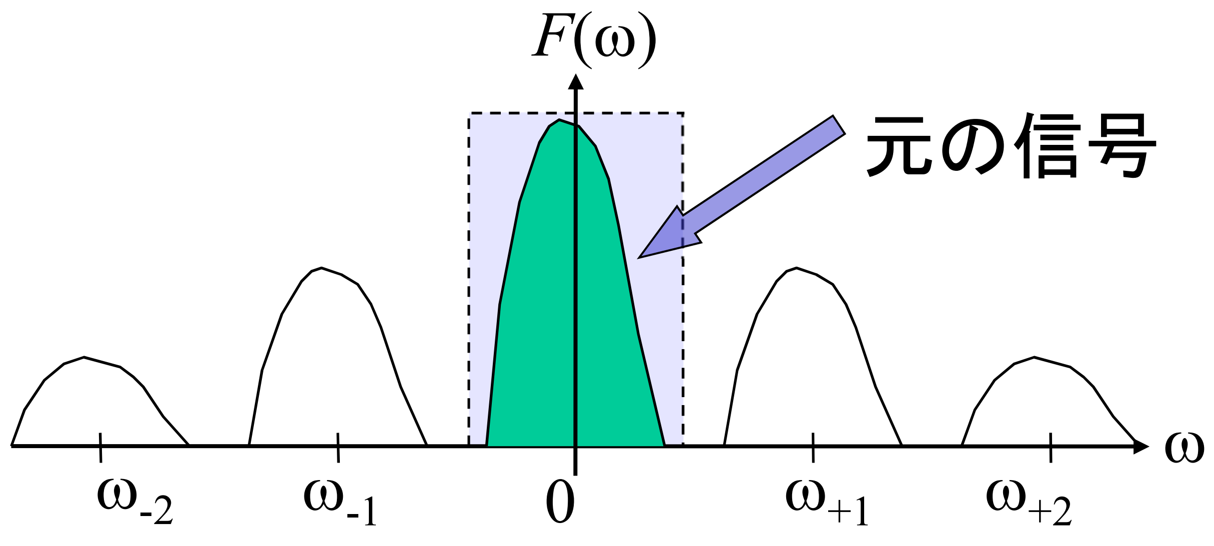
周期関数$c(t)$を搬送波とした振幅変調

$c(t)$が周期関数(周期T、$\omega_n=2n\pi/T$)であれば、

$$c(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(j\omega_n t)$$:フーリエ級数展開

変調後は

$$s(t)c(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\omega_w}^{+\omega_w} C_n S(\omega)\exp\{+j(\omega+\omega_n)t\}d\omega$$

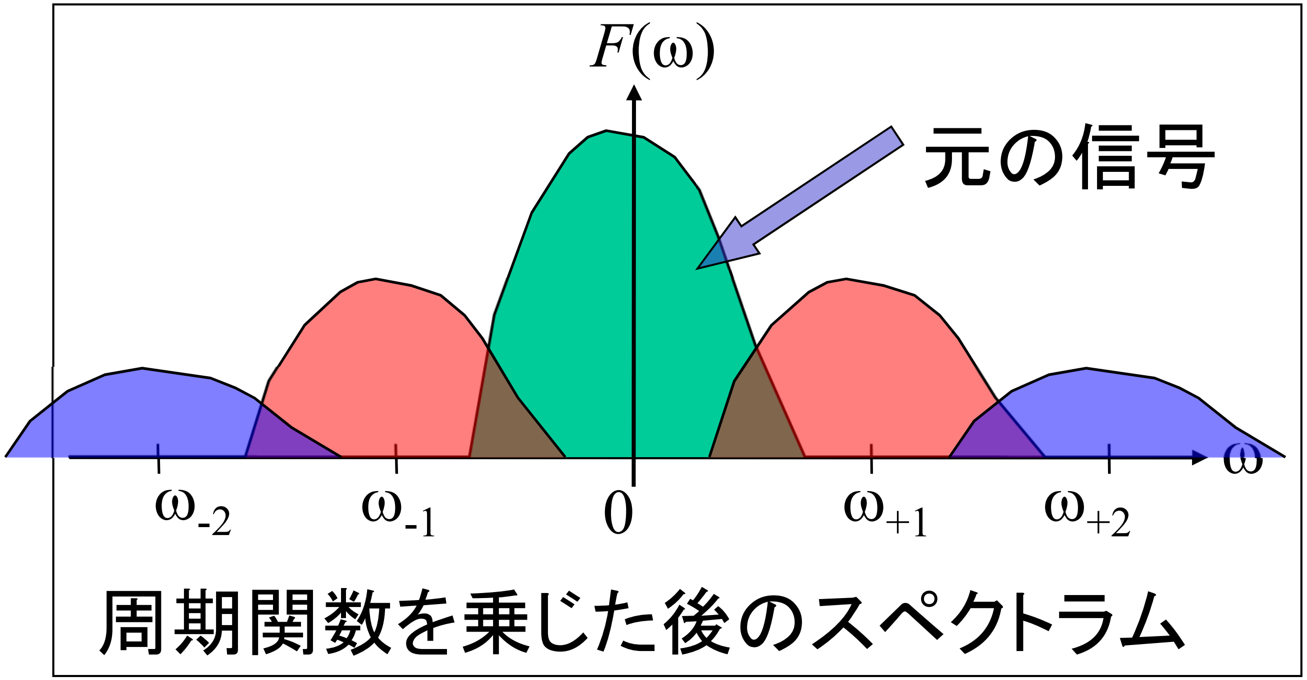


周期関数を乗じた後のスペクトラム

$-\omega_w<\omega<+\omega_w$の領域を取り出すと

元の信号の復元

$2\pi/T$が狭すぎると



スペクトラムの重なり⇒元信号再現不可能（エイリアジング）

$\omega_c\,(=2\pi/T) < 2\omega_w$の時に発生

周期関数としてインパルス列でも可！

$$c(t) = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) \Longrightarrow s(t)c(t) = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s(nT)\delta(t-nT)$$

必要な情報はTおきの飛び飛びのデータ列$s(nT)$

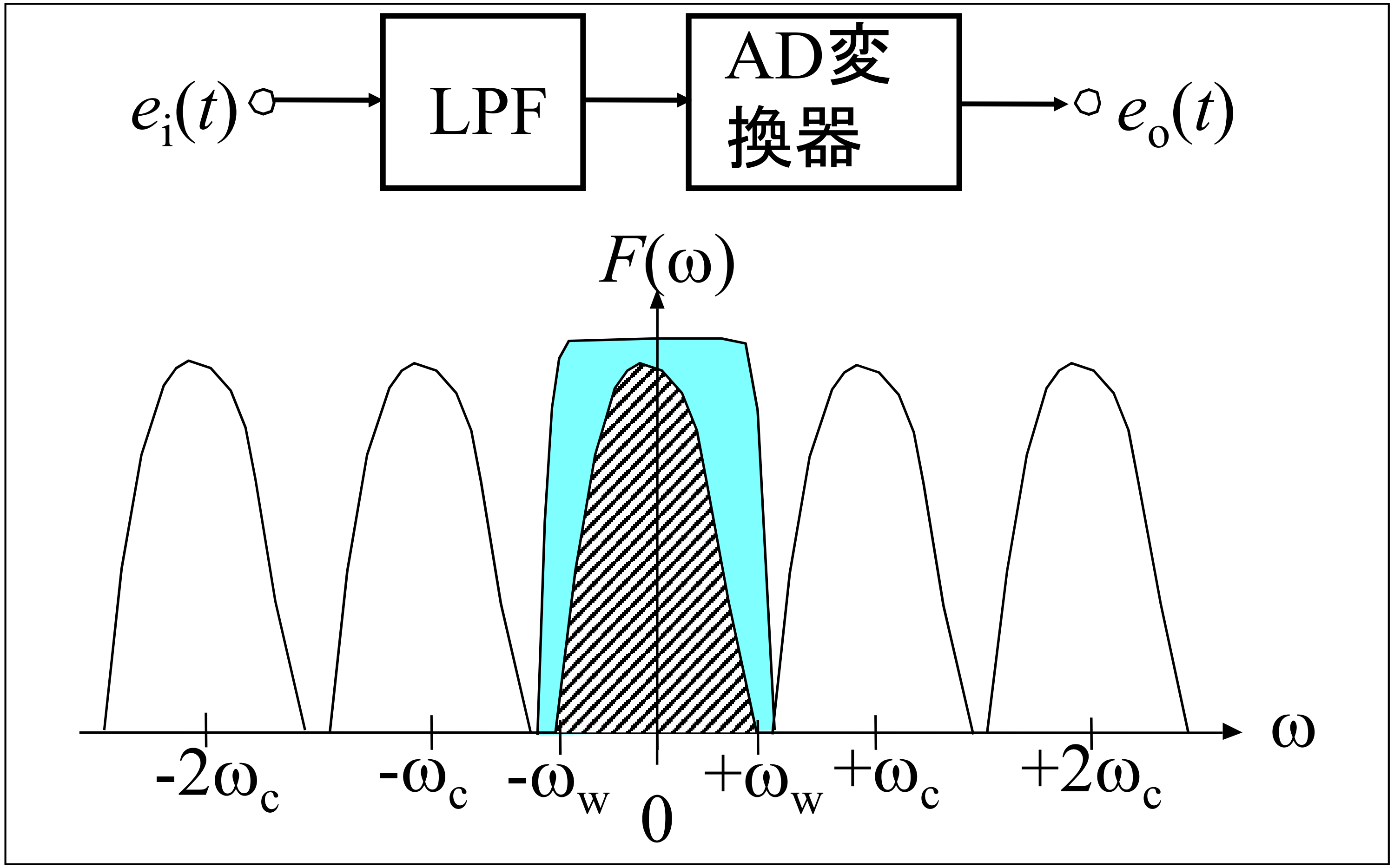
標本化定理（Sampling Theorem）

信号に含まれている最高周波数f_wの2倍以上の周波数で信号を抽出（サンプリング）すれば，その信号列から元の信号が忠実に再現できる。

信号列に比例したインパルス列を発生させ，最高周波数f_wの理想フィルタを通過させれば良い。

AD変換器の概要

入力信号における対域外スペクトラムの除去 ⇨ アンチエイリアジングフィルタ



$2\omega_c-\omega_w$によりフィルタ性能に対する要求の緩和

元の波形＝理想低域フィルタ通過後の波形

$$s(t) = LPF[s(t)c(t)] = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)h(t-nT)$$

理想低域フィルタのインパルス応答（標本化関数）

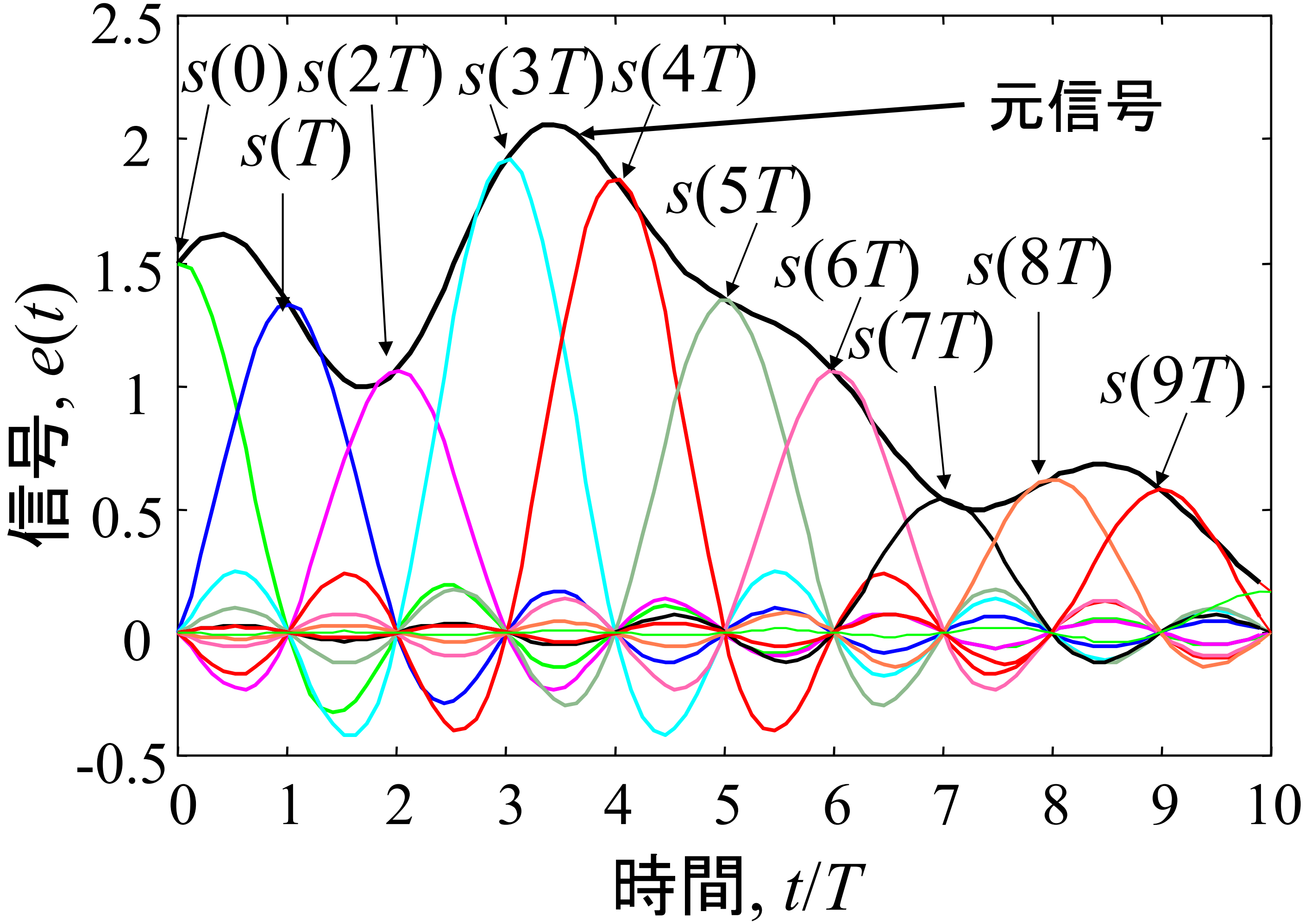
$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_w}^{+\omega_w} \exp(j\omega t)\,d\omega = \frac{\sin(\omega_w t)}{\pi t} = \frac{1}{T}\mathrm{sinc}(t/T)$$

（$\omega_w T=\pi$の時）

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\,\mathrm{sinc}(t/T-n)$$

注：$t=nT$ $(n\neq 0)$では$h(t\text{-}nT)=0$

元信号$s(t)$と$s(nT)h(t\text{-}nT)$の関係



標本化関数の直交性（$T=\pi/\omega_w$）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-mT)h(t-nT)dt = T^{-1}\delta_{mn}$$

パーシバールの定理の離散化版

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)^2 dt = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)^2$$

信号のエネルギーは標本値から計算可能

単位時間当たりに変換すれば

$$\overline{s(t)^2} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} s(t)^2 dt\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} s(nT)^2\right]$$

信号の実効値(Root-Mean-Square: RMS)

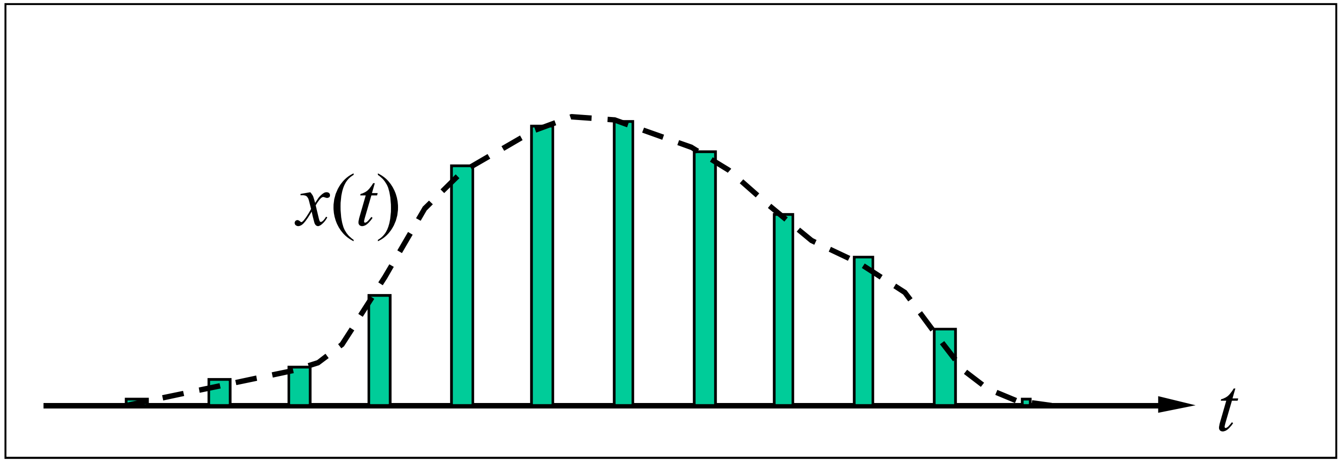
$$s_{RMS} = \sqrt{\overline{s(t)^2}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} s(nT)^2\right]}$$

標本化定理より

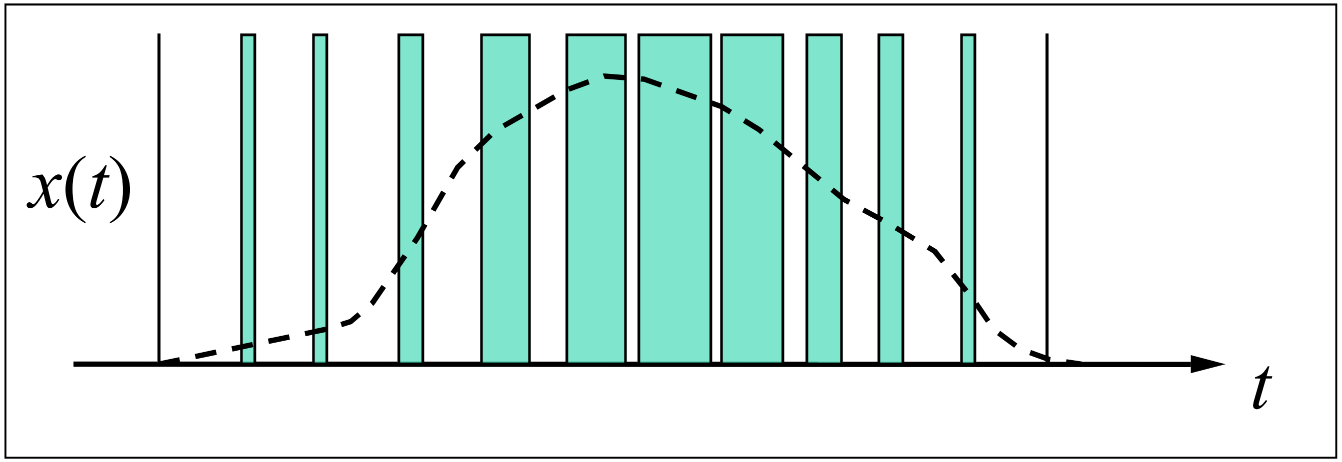
理想的には、周波数帯域f_{w}の2倍の速度で標本化された情報（パルス）により、元のデータを忠実に再現できる。

理想的には、周波数帯域f_{w}の2倍のデータ転送レートにて、標本化された情報（パルス）が転送できる。

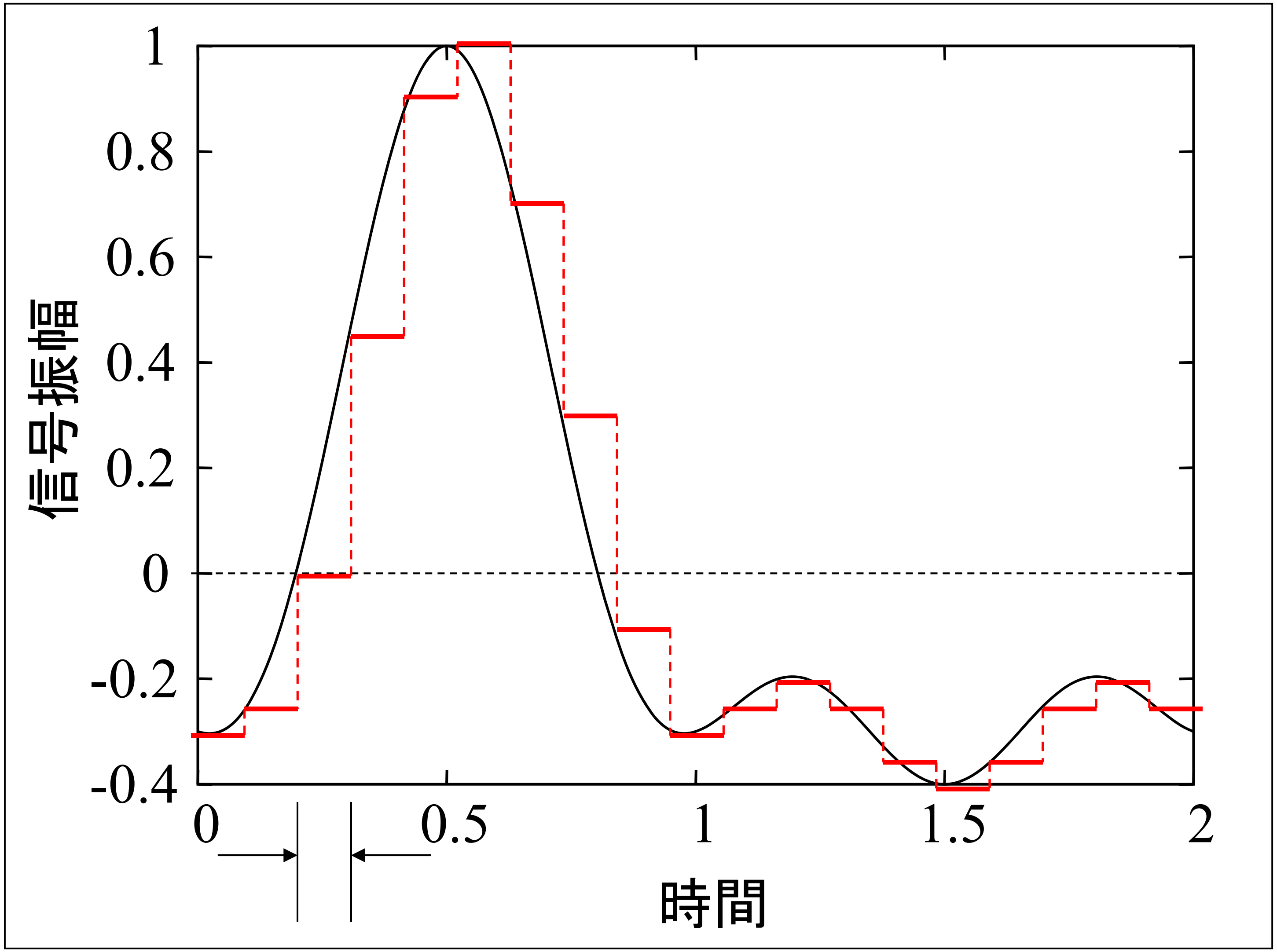
パルス振幅変調
(Pulse Amplitude Modulation: PAM)



パルス幅変調
(Pulse Width Modulation: PWM)



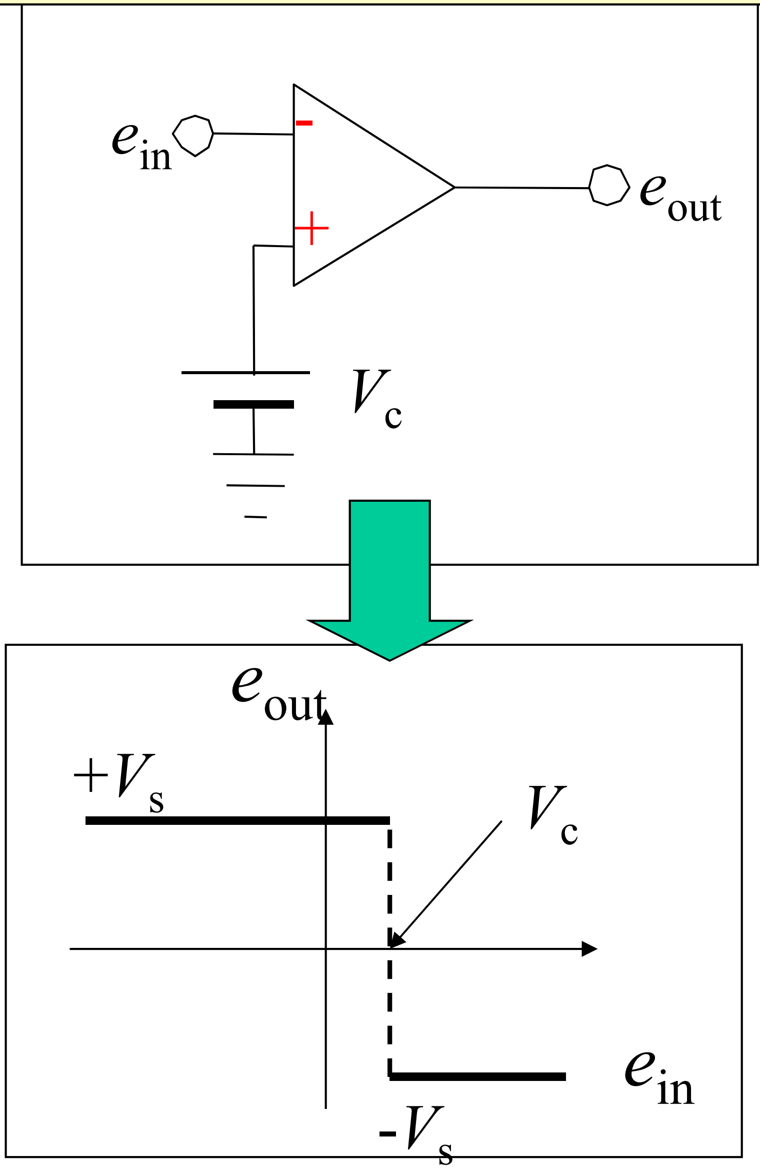
標本化と保持(Sampling & Hold)後の波形



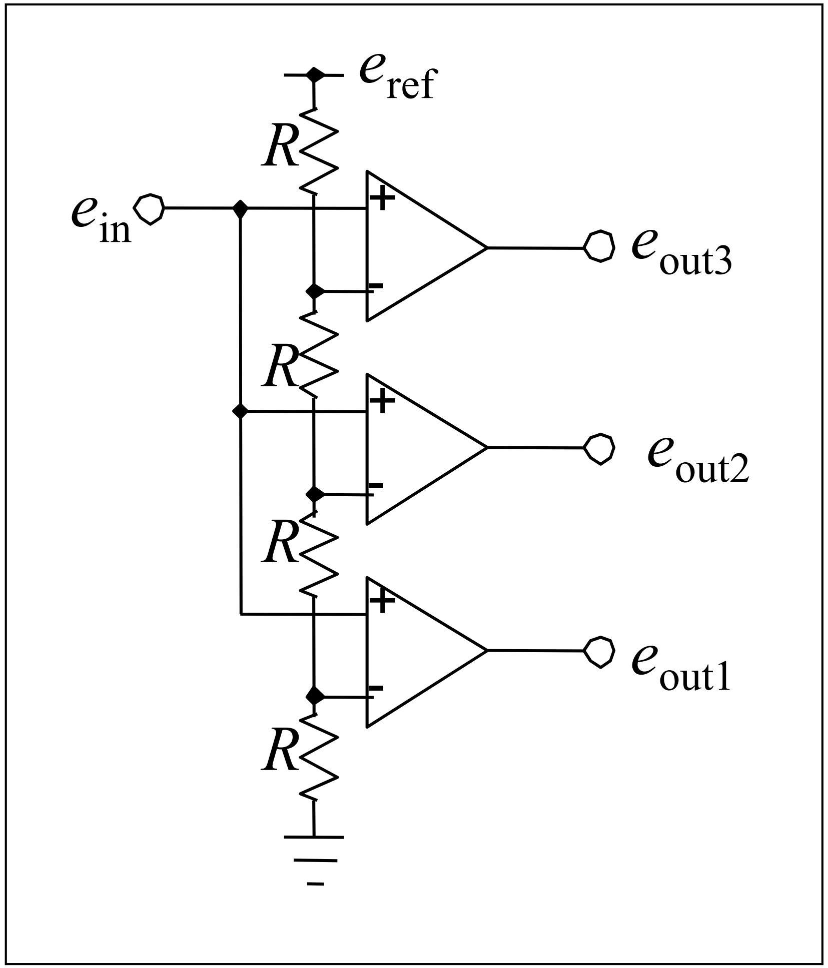
標本化周期(この時間の間に量子化(数値化))

アナログ/デジタル変換

比較器(コンパレータ)



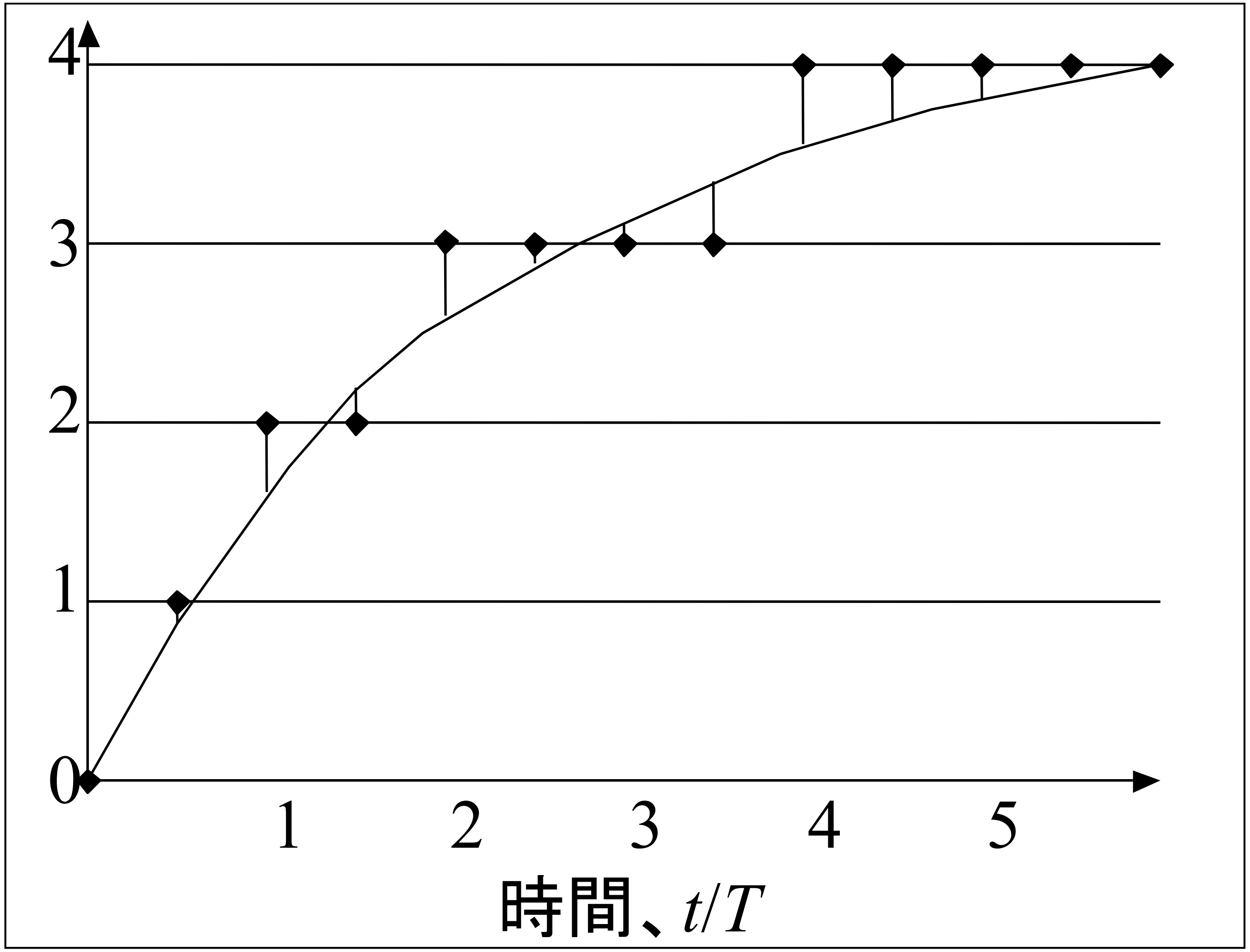
$\pm V_s$:飽和出力(≒電源電圧)



並列型AD変換器(2 bit)

量子化雑音

アナログ信号を数値で表したことによる誤差



数値間のステップの振幅がΔの時

$$e_{RMS} = \sqrt{\overline{e(t)^2}} = \sqrt{\int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} x^2 p(x) dx}$$

$p(x)$は一様だから、$p(x)=1/\Delta$

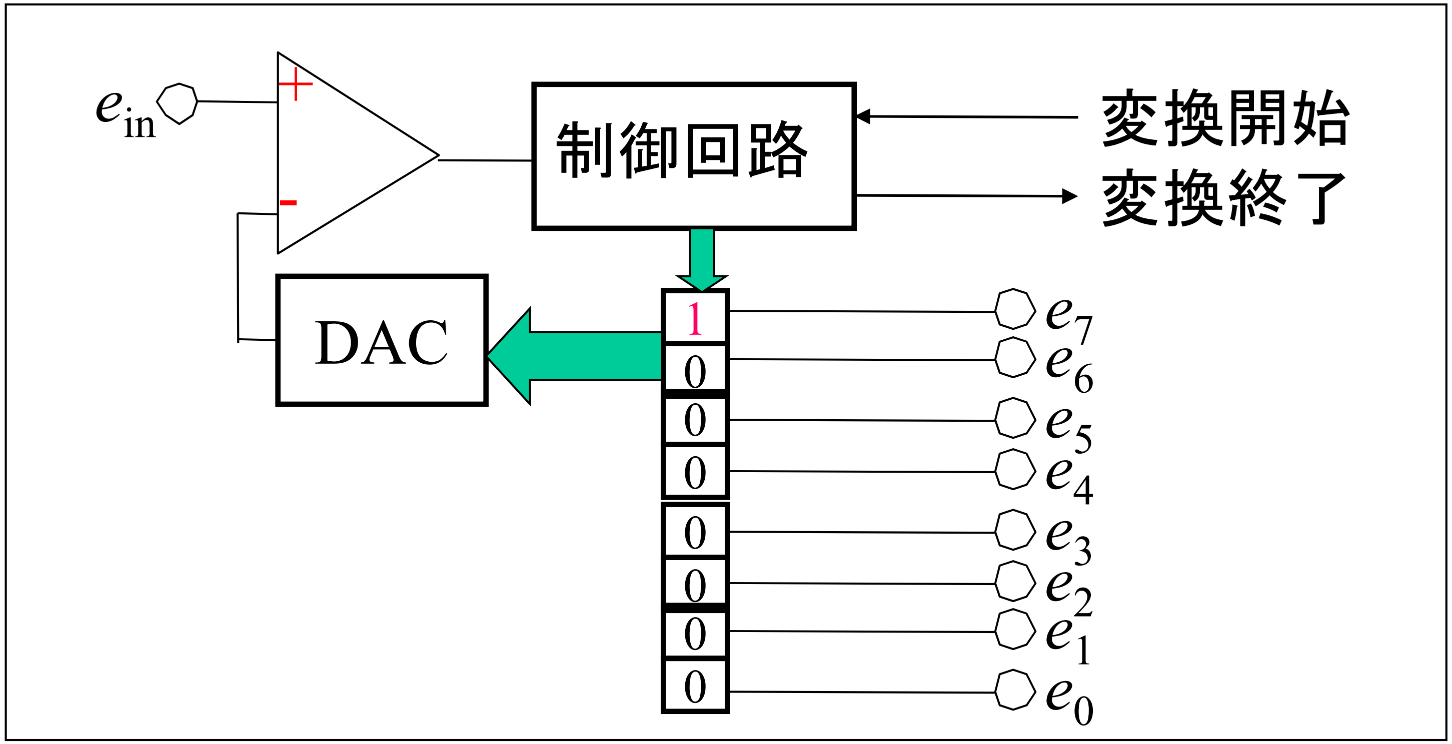
⇩

$$e_{RMS} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}\int_{0}^{+\Delta/2} x^2 dx} = \frac{\Delta}{2\sqrt{3}}$$

周波数依存性を持たず＝白色雑音と同様の振る舞い

パワースペクトラム $P_N = \dfrac{\pi\Delta^2}{6\omega_w}$

逐次比較型AD変換器



最上位ビットを1に試行

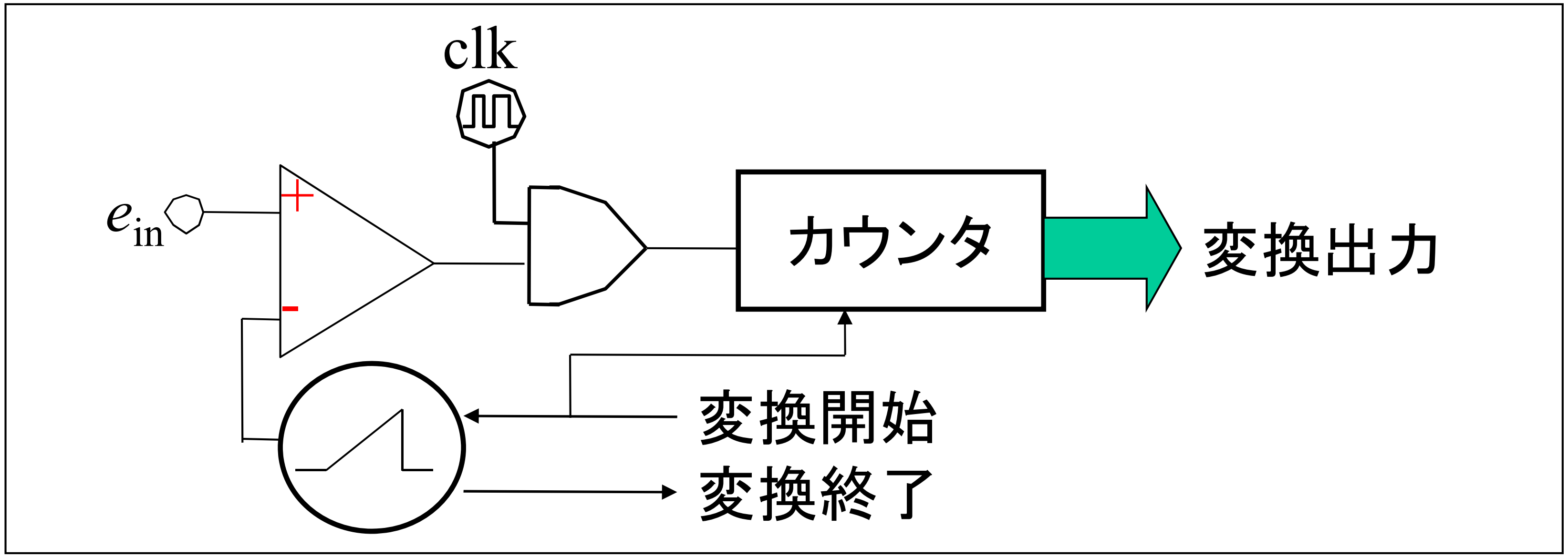
↓

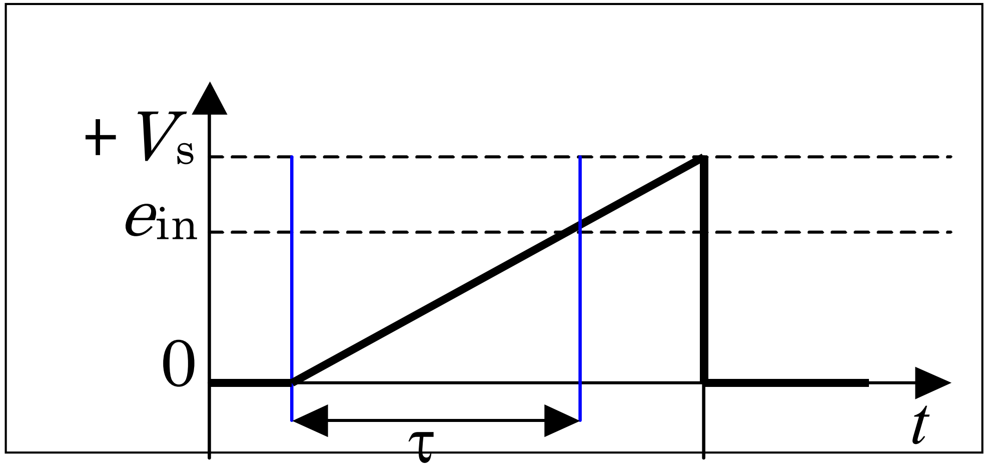
比較器出力によってビットデータを固定

↓

次のビットを1に試行（以下順次下位ビットへ）

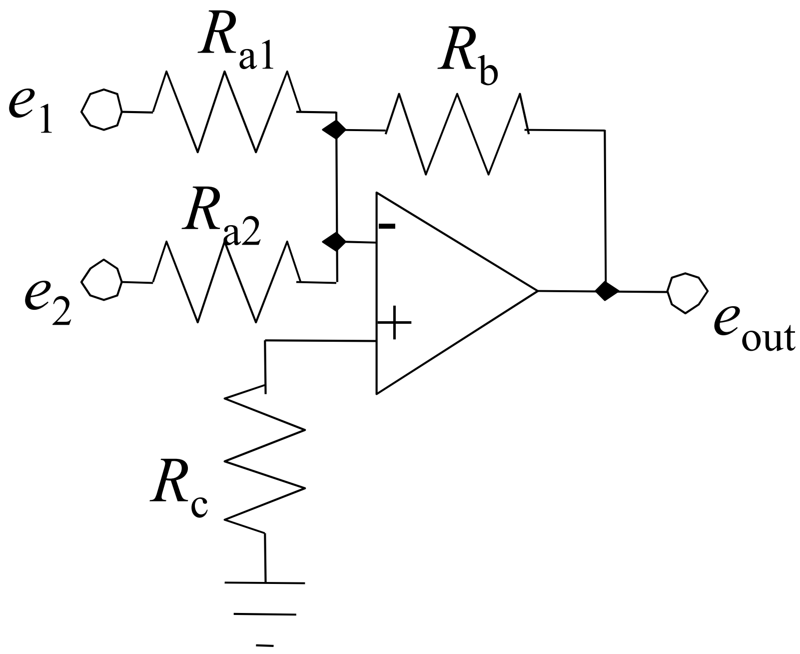
積分型AD変換器





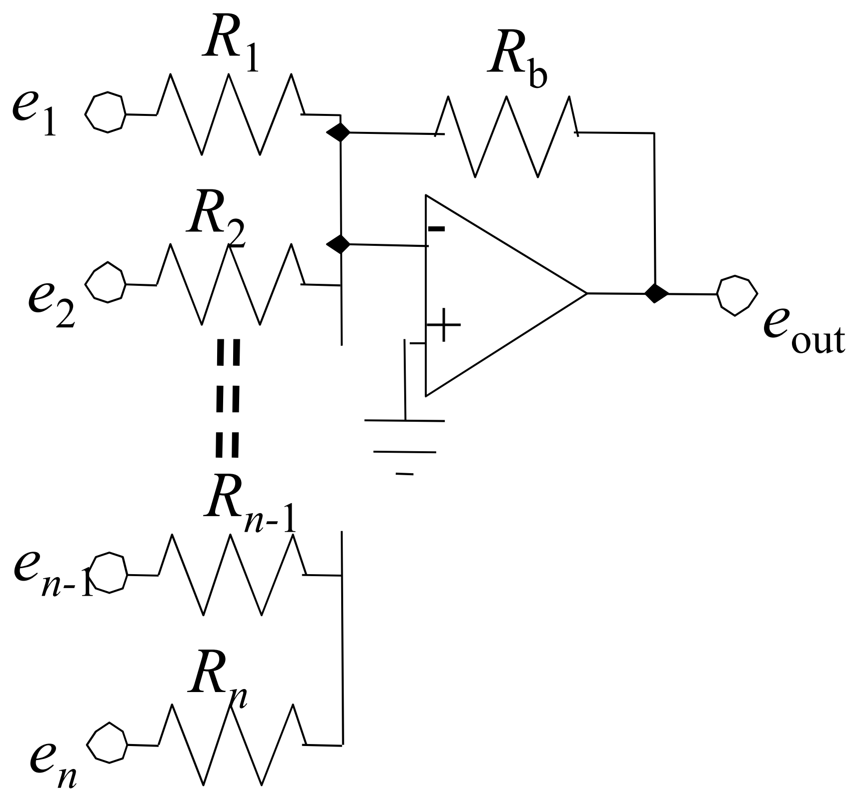
長時間計測すれば
高精度

電圧→時間



$$e_{out} = -\frac{R_b}{R_{a1}} e_1 - \frac{R_b}{R_{a2}} e_2$$

アナログ加算器

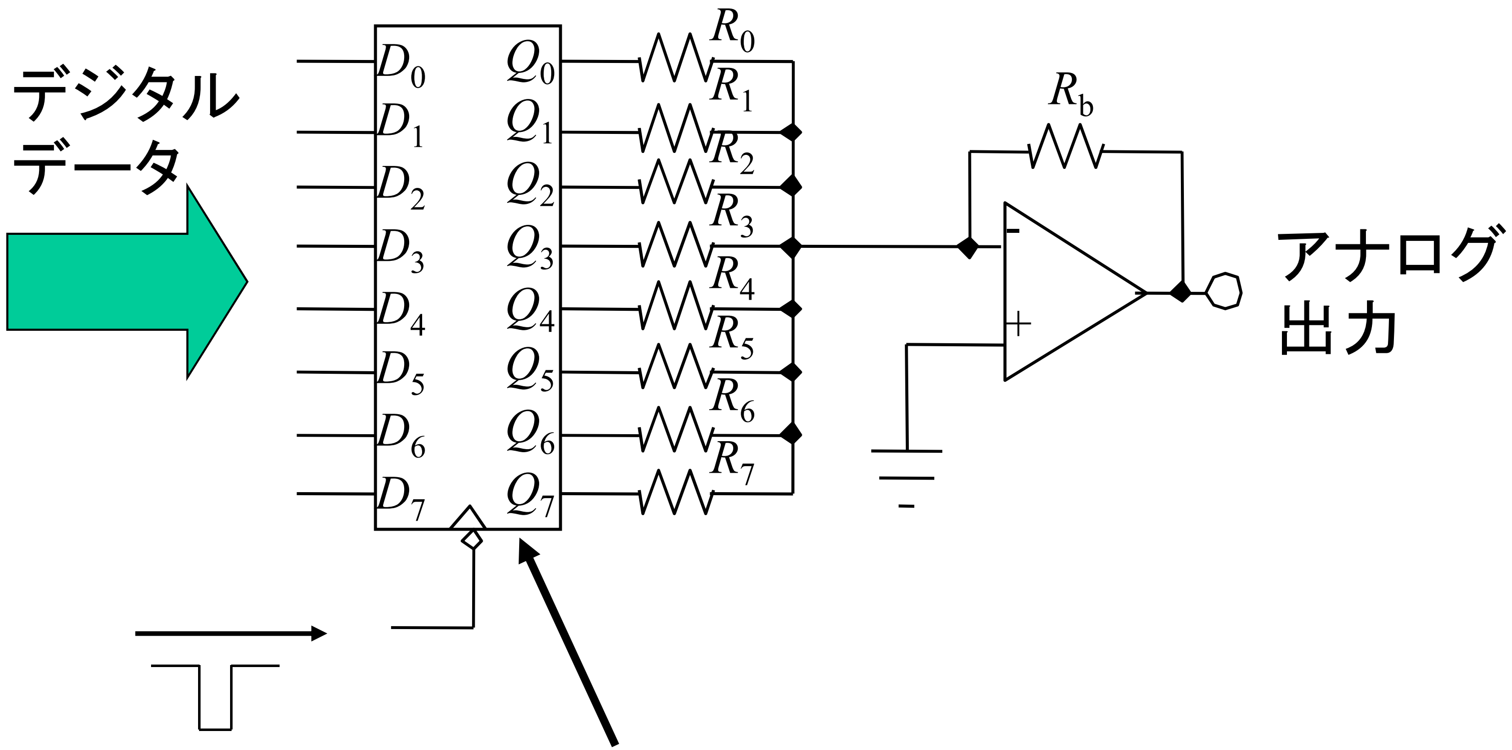


$$e_{out} = -\sum_{n=1}^{N} \left[\frac{R_b}{R_n} \right] e_n$$

$R_n \propto 2^{-n}$ とすれば

NビットD/A変換器

8bit D/A変換器の構成



ラッチ : 次のデータが入力される
まで、前のデータを保持

抵抗の精度がDA変換の精度を決定

符号有り等間隔Nbit表現の場合、

最大振幅＝$(2^{N\text{-}1}\text{-}0.5)\Delta$

ダイナミックレンジ（最大振幅と雑音実効値の比）の上限

$$\frac{(2^{N-1}-0.5)\Delta}{\Delta/\left(2\sqrt{3}\right)} \cong \sqrt{3}\times 2^{N} = 6.02N + 4.77[\mathrm{dB}]$$

N=16(15:振幅+1:符号)の時、101 dB

実際の雑音＝量子化雑音＋回路の白色雑音

注:入力正弦波の実効値と雑音実効値の比で定義した場合、6.02N+1.76 [dB]

標本化された信号$s(nT)$のスペクトラム表示

$$s(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_w}^{+\omega_w} S(\omega)\exp(+j\omega nT)\,d\omega$$

$$S(\omega) = \frac{\pi}{\omega_w}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\exp(-jn\omega T)$$

$z=\exp(j\omega T)$を定義し、$\omega_w T=\pi$、$S(z)=T^{-1}S(\omega)$とすると

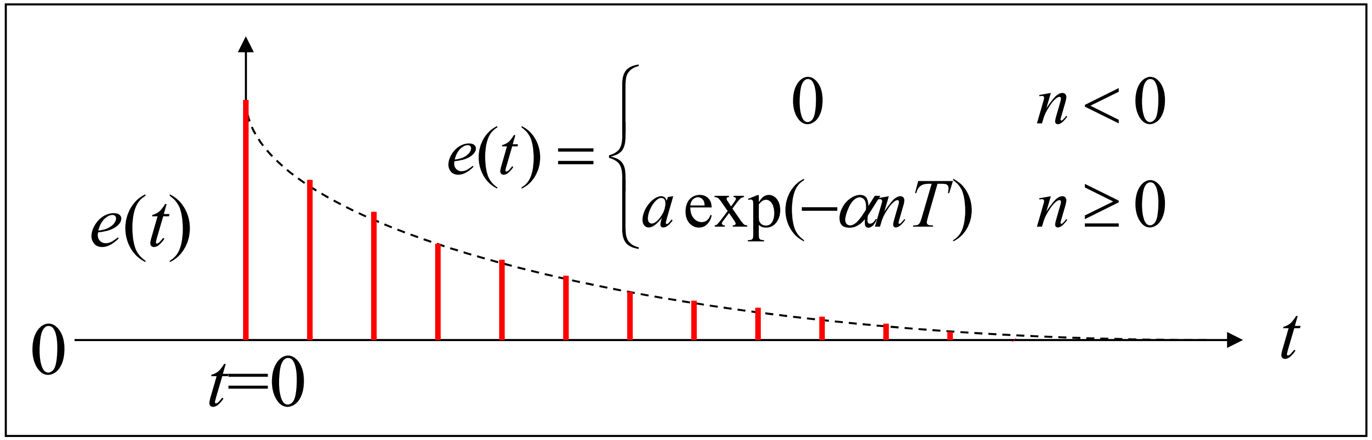
z変換表示

$$s(nT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c S(z)z^{n-1}dz$$

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)z^{-n}$$

cは積分路
•単位円を反時計回りに1周($t>0$)

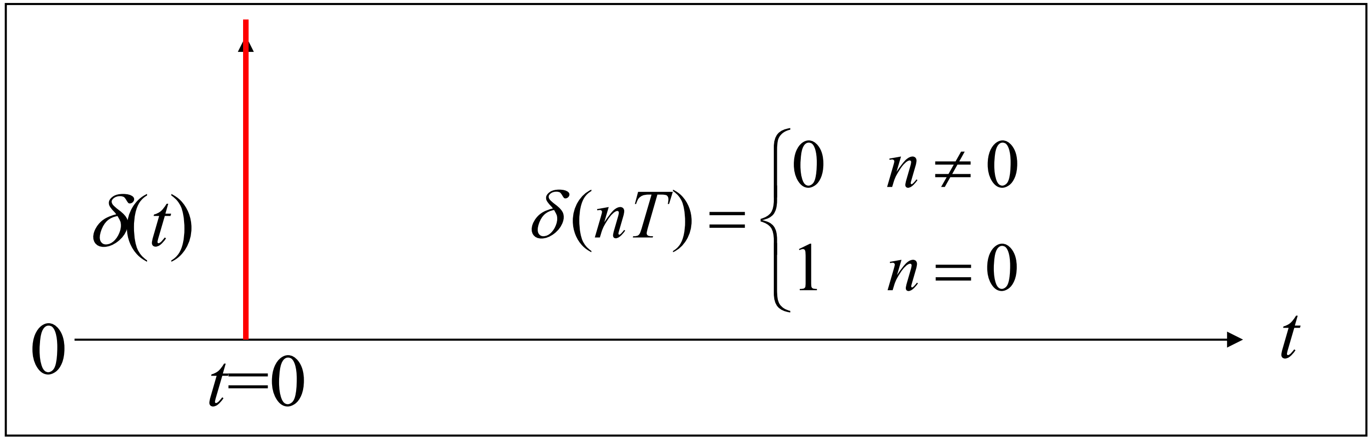
1クロック遅延 $= z^{-1}$



$$e(t)=\begin{cases}0 & n<0\\ a\exp(-\alpha nT) & n\geq 0\end{cases}$$

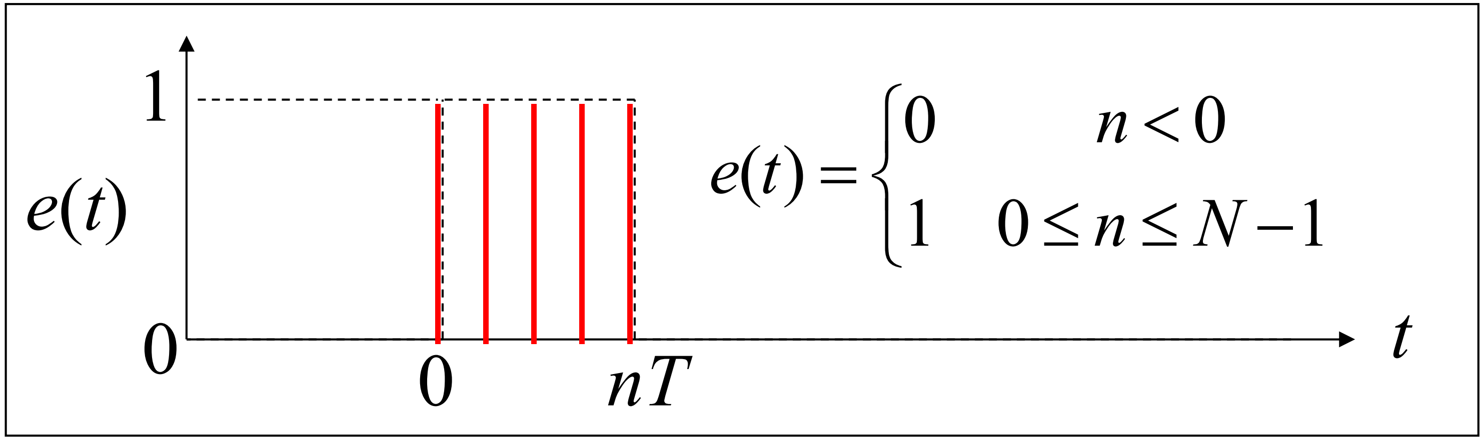
$$\mathcal{Z}\left[e(t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a\{\exp(-\alpha T)z^{-1}\}^{n}=\frac{a}{1-\exp(-\alpha T)z^{-1}}$$

インパルス関数δ(t)　$\mathcal{Z}[\delta(t)]=1$



$$\delta(nT)=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$$

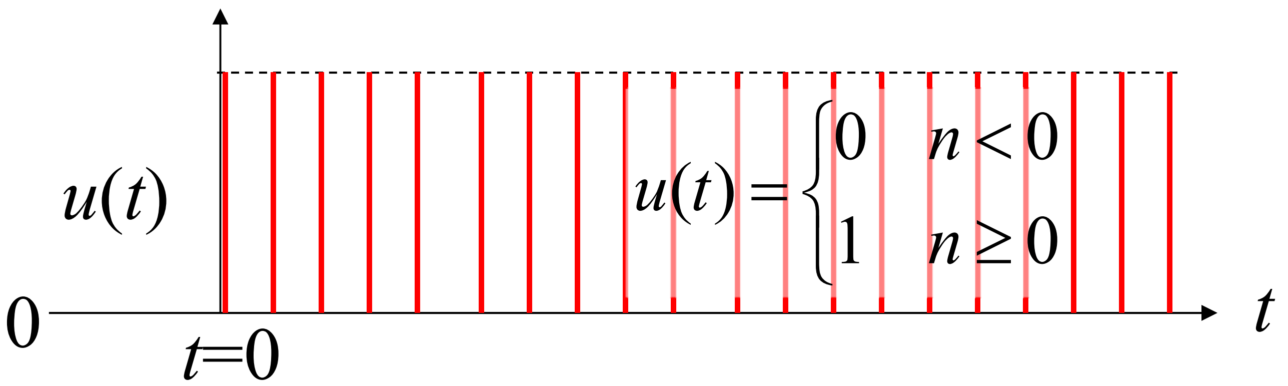
単一パルス



$$e(t)=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & 0\le n\le N-1\end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\left[e(t)\right]=\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}=\frac{z^{-N}-1}{z^{-1}-1}$$

ステップ関数 $u(t)\Rightarrow \mathcal{Z}[u(t)]=1/(1-z^{-1})$



$$u(t)=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n\ge 0\end{cases}$$

z=exp($j\omega T$)であるから $Z[e(t)] = \dfrac{z^{-N}-1}{z^{-1}-1}$ は？

$$E(\omega) = \frac{\exp(-jN\omega T)-1}{\exp(-j\omega T)-1}$$

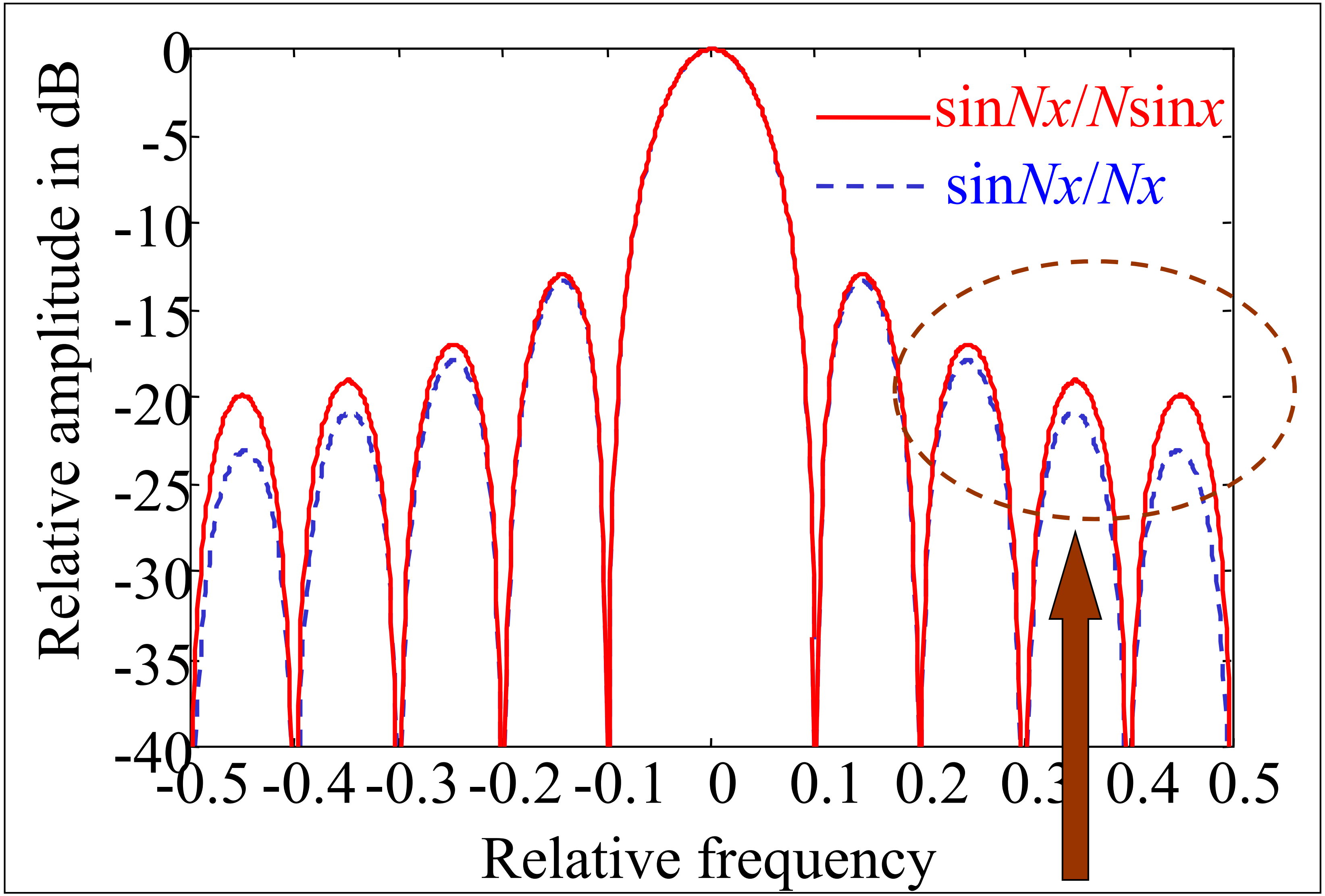
$$= N\exp\{-j(N-1)\omega T/2\}\frac{\sin(N\omega T/2)}{N\sin(\omega T/2)}$$

単一パルスの
離散化版

$$\cong N\exp\{-j(N-1)\omega T/2\}\mathrm{sinc}(N\omega T/2)$$

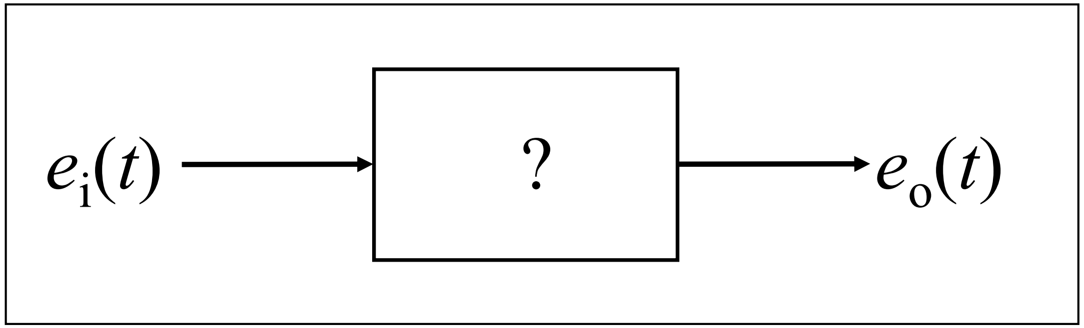
パルス中心の
ずれ：$(N\text{-}1)T/2$

連続関数と離散化関数で何故違う？



スペクトラムの
折り返しの影響

線形システム $f(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$



システム伝達関数（周波数特性）

$$H(z) = \frac{E_o(z)}{E_i(z)}$$ ：各周波数毎の応答の和

$$e_o(nT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[(n-m)T]e_i(mT)$$ ：畳み込み積分

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c H(z)z^{n-1}dz$$ ：インパルス応答

微分演算

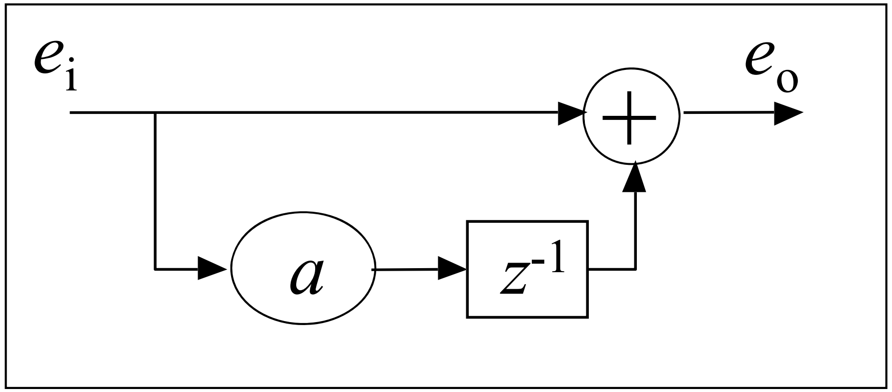
1クロック遅延 $= z^{-1}$

$$\frac{d\{e(t)\}}{dt} = \frac{1}{T}\{e(t) - e(t-T)\} \Rightarrow H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

積分演算

$$\int_{t-NT}^{t} e(t)dt = T\sum_{n=0}^{N-1} e(t-nT) \Rightarrow H(z) = T\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = T\frac{z^{-N}-1}{z^{-1}-1}$$

離散系信号処理(その1)



1クロック遅延 $= z^{-1}$

$$e_o(nT) = e_i(nT) + ae_i\{(n-1)T\}$$

⇩

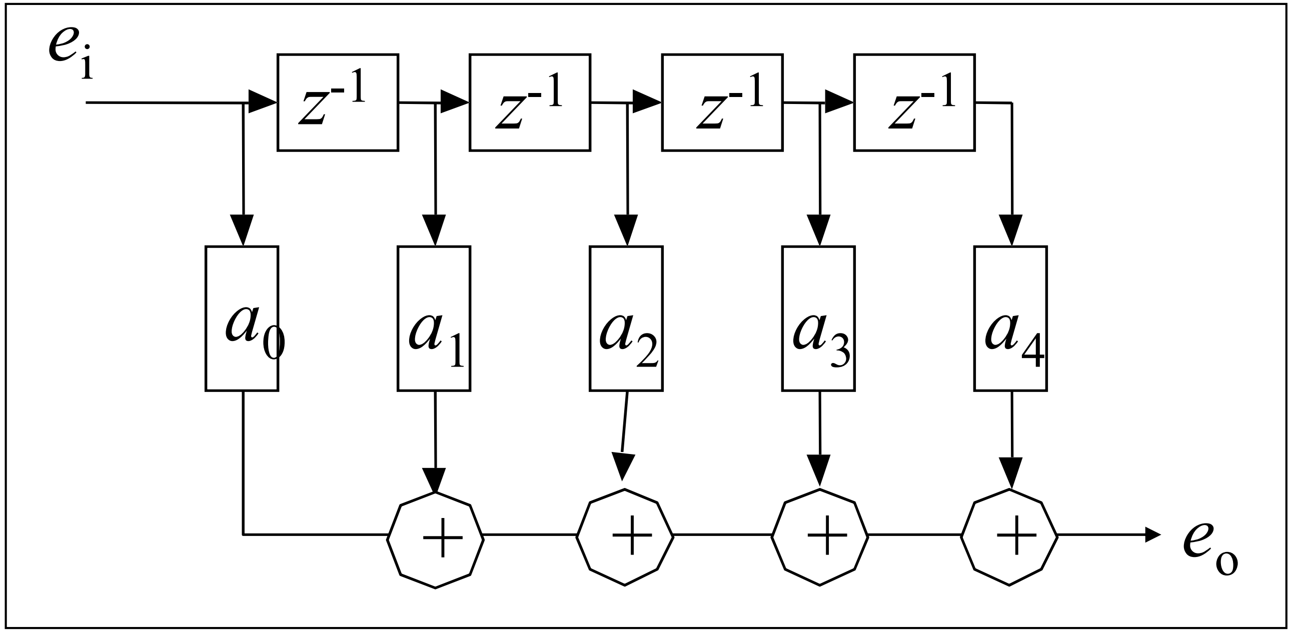
$$E_o(z) = E_i(z) + az^{-1}E_i(z) = \{1 + az^{-1}\}E_i(z)$$

⇩

$$H(z) = 1 + az^{-1}$$

デジタルフィルタ＝数値計算によるフィルタリング

Finite Impulse Response (FIR) フィルタ



$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n}$$

位相直線性が可能、しかし多くの段数を必要

平均値フィルタ

$$e_{\mathrm{o}}(mT)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e_{\mathrm{i}}\{(m-n)T\}$$

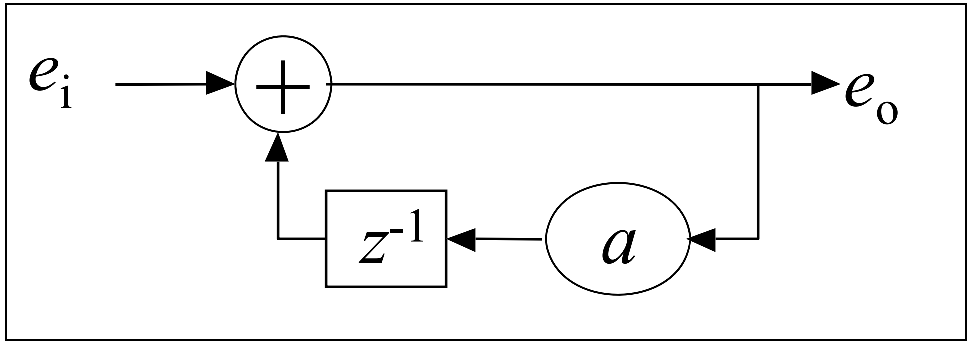
有限インパルス応答
(FIR)フィルタの一例

$$H(z)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{z^{-N}-1}{N(z^{-1}-1)}$$

$$H(\omega)=\exp\{-j(N-1)\omega T/2\}\frac{\sin(N\omega T/2)}{N\sin(\omega T/2)}$$

線形位相:群遅延が周波数に依存せず

離散系信号処理（その２）



無限インパルス応答
(IIR)フィルタの一例

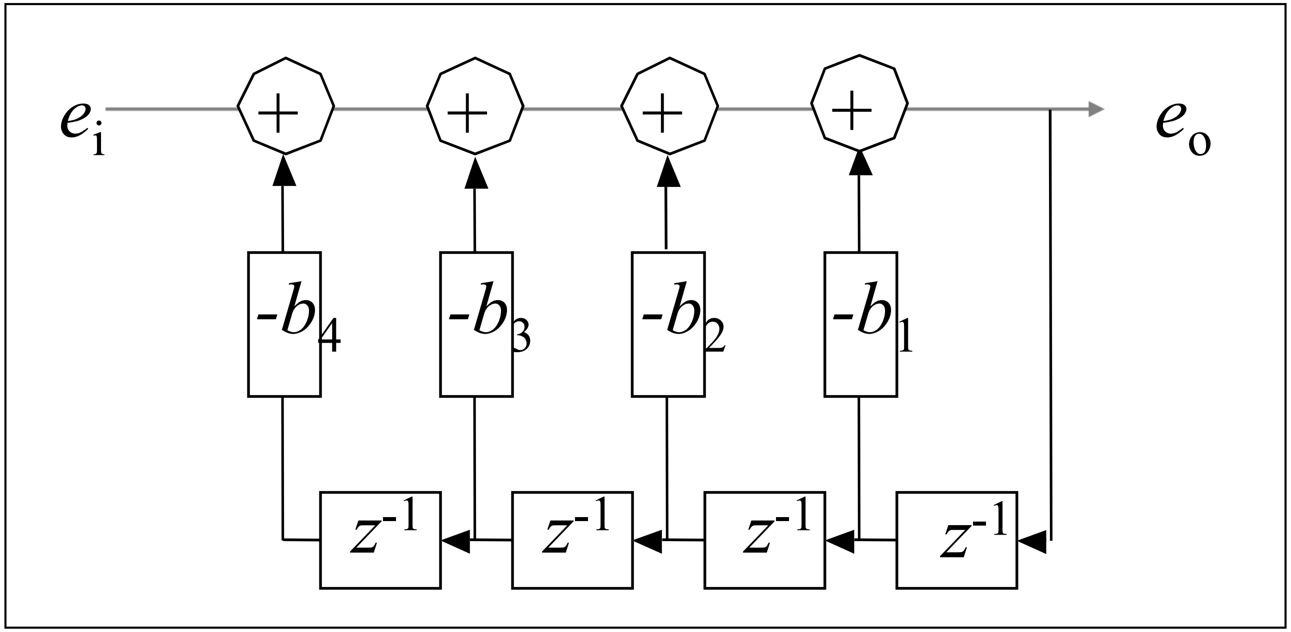
$$e_\mathrm{o}(nT) = e_\mathrm{i}(nT) + a e_\mathrm{o}\{(n-1)T\}$$

$$E_\mathrm{o}(z) = E_\mathrm{i}(z) + a z^{-1} E_\mathrm{o}(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - a \exp(-j\omega T)}$$

Infinite Impulse Response (IIR) フィルタ

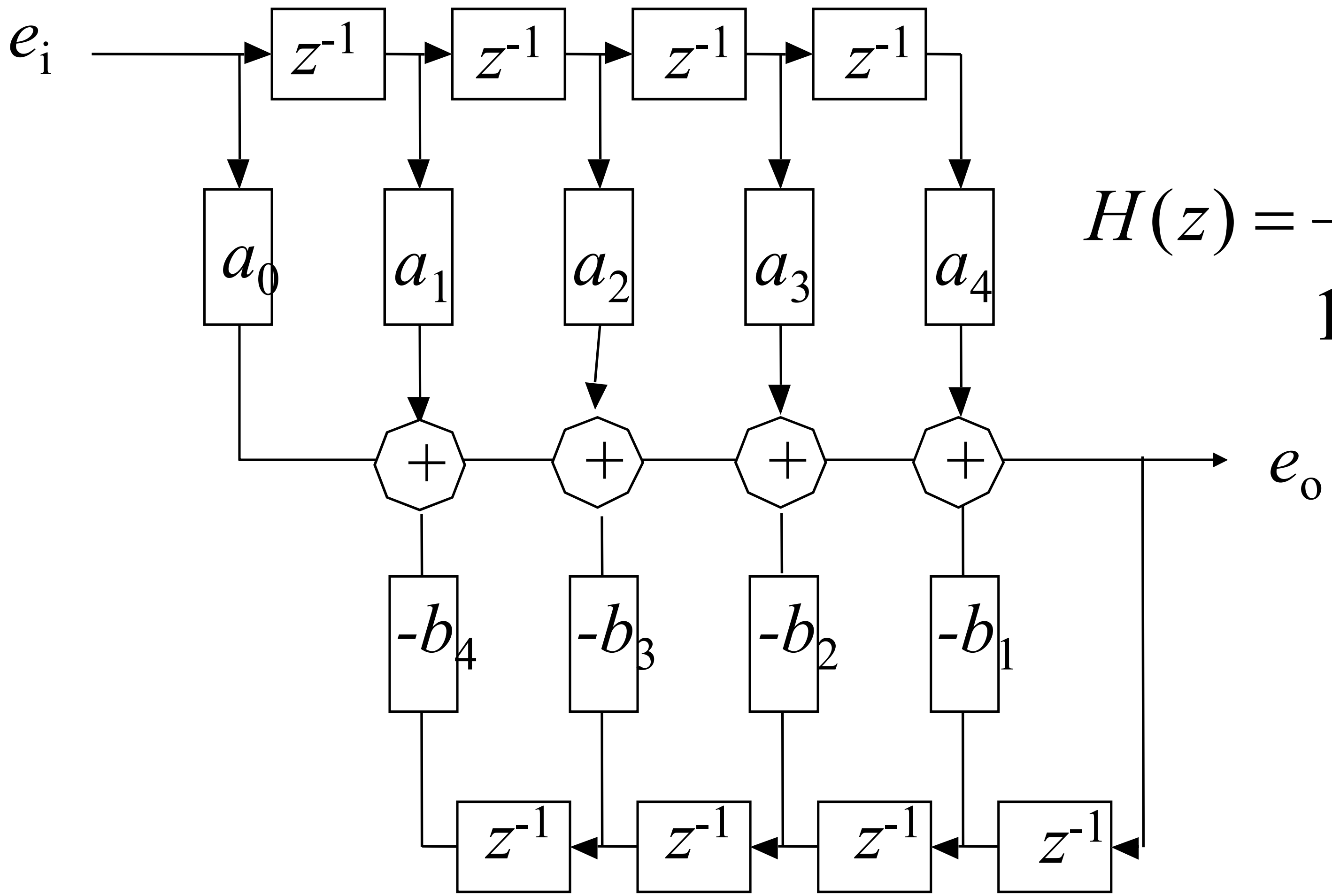


$$H(z) = \left(1 + \sum_{n=1}^{N} b_n z^{-n}\right)^{-1}$$

短い演算で急峻な周波数特性可能

ただし、線形位相実現せず

デジタルフィルタの一般形

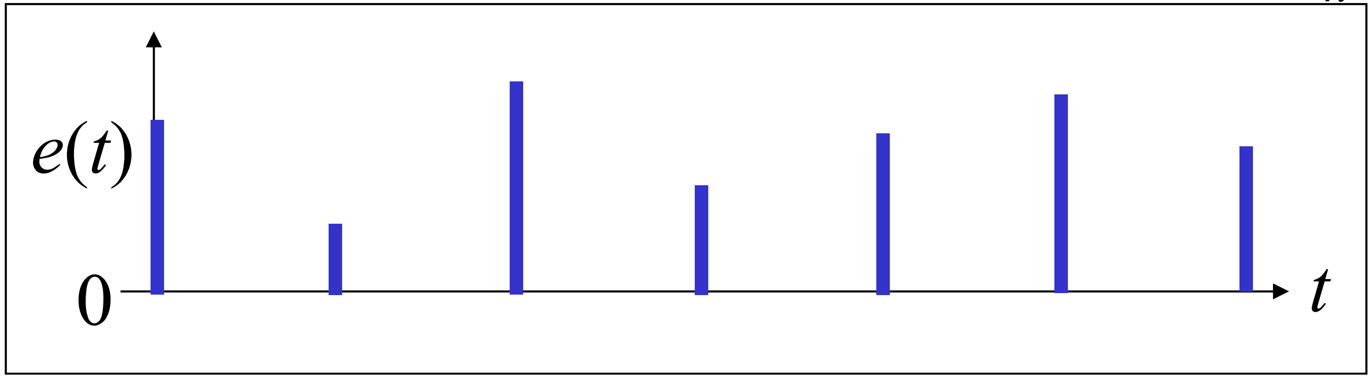


$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{N} b_n z^{-n}}$$

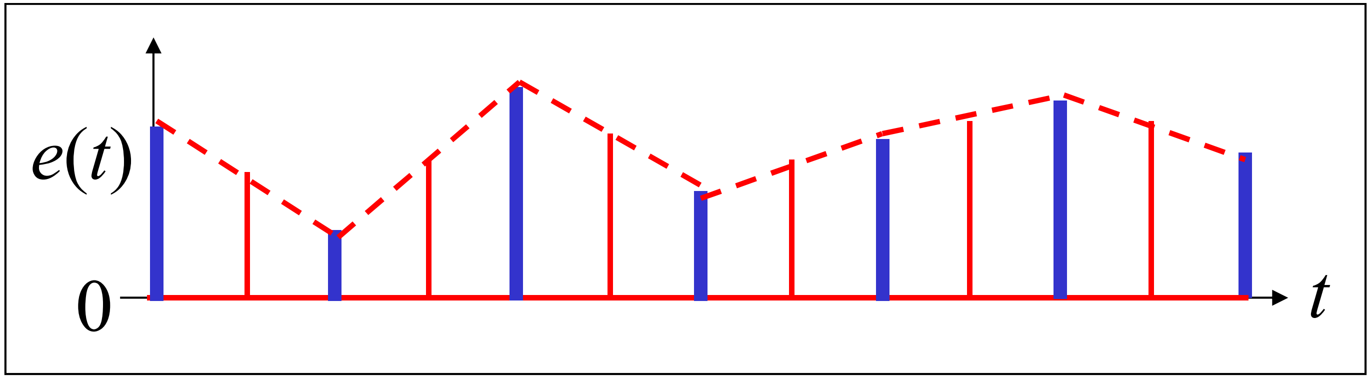
インターポレーション

データよりも速い周期で補間

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n/M}$$

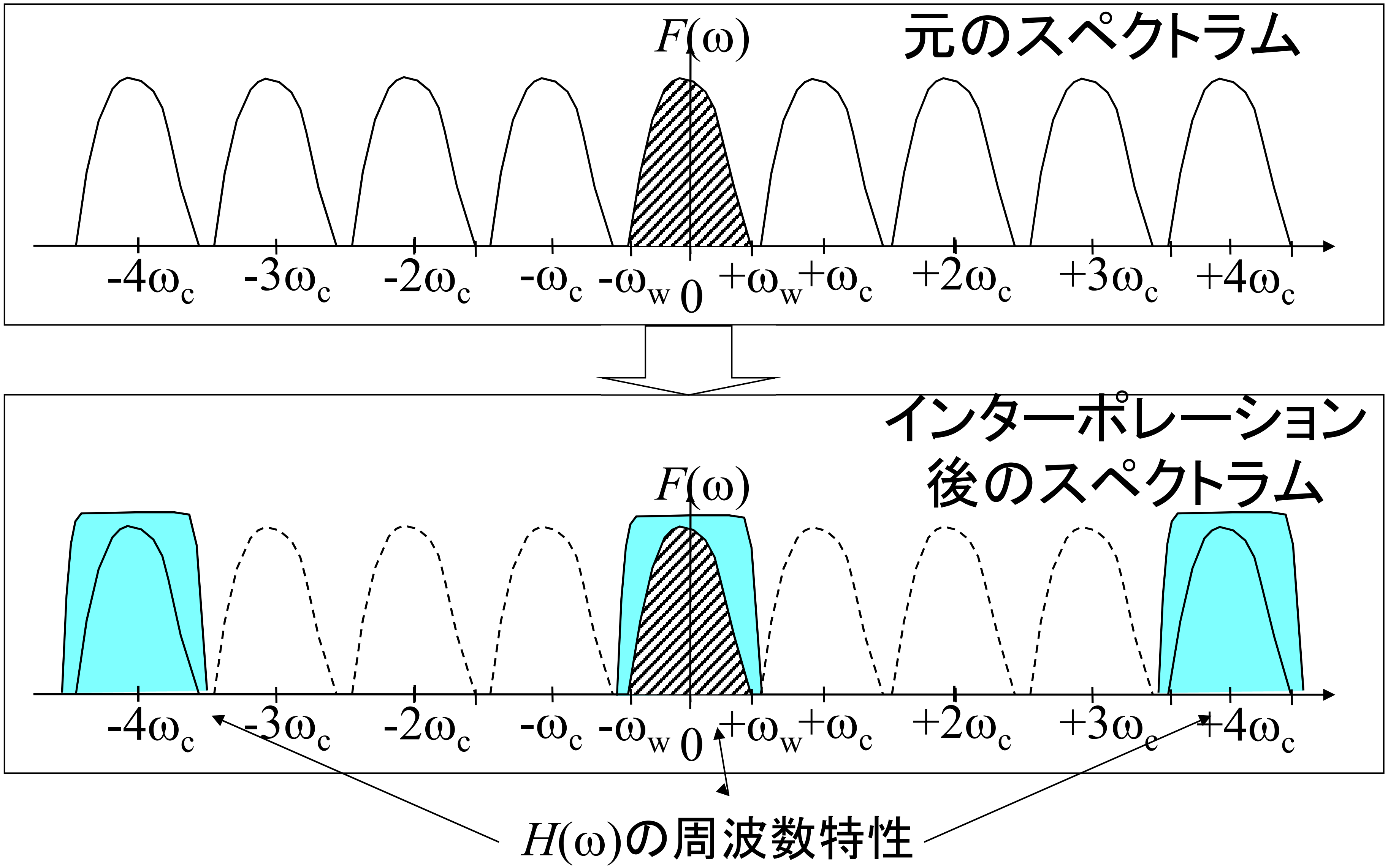


一例：間隙の補間　$H(z)=(2+z^{1/2}+z^{-1/2})/4$



$H(\omega)=\cos^2(\omega T/4)$ ＝エイリアジングの緩和

見かけ上の標本化周波数の上昇



アンチエイリアジングフィルタに対する仕様の緩和

オーバーサンプリング

量子化雑音のパワースペクトラム　$P_N = \dfrac{\pi\Delta^2}{6\omega_w}$

信号帯域ω_wのM倍の周波数で標本化すれば、量子化雑音はM倍の周波数範囲に拡散⇒P_NはM^{-1}に減少

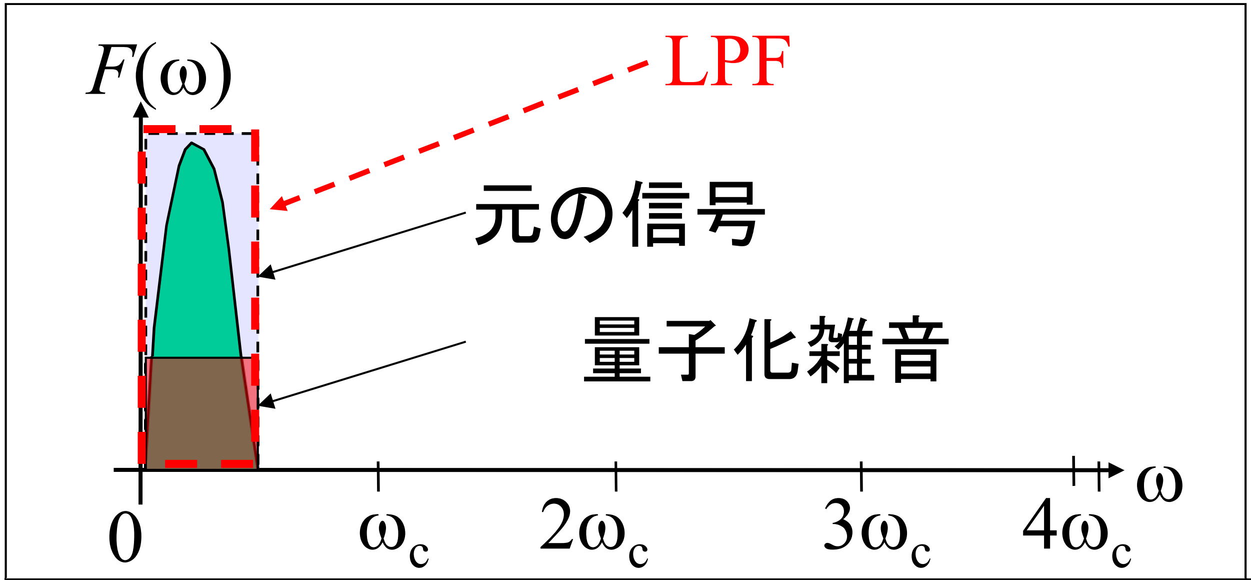
⇩

信号帯域内の量子化雑音(実効値)が$M^{-0.5}$に減少

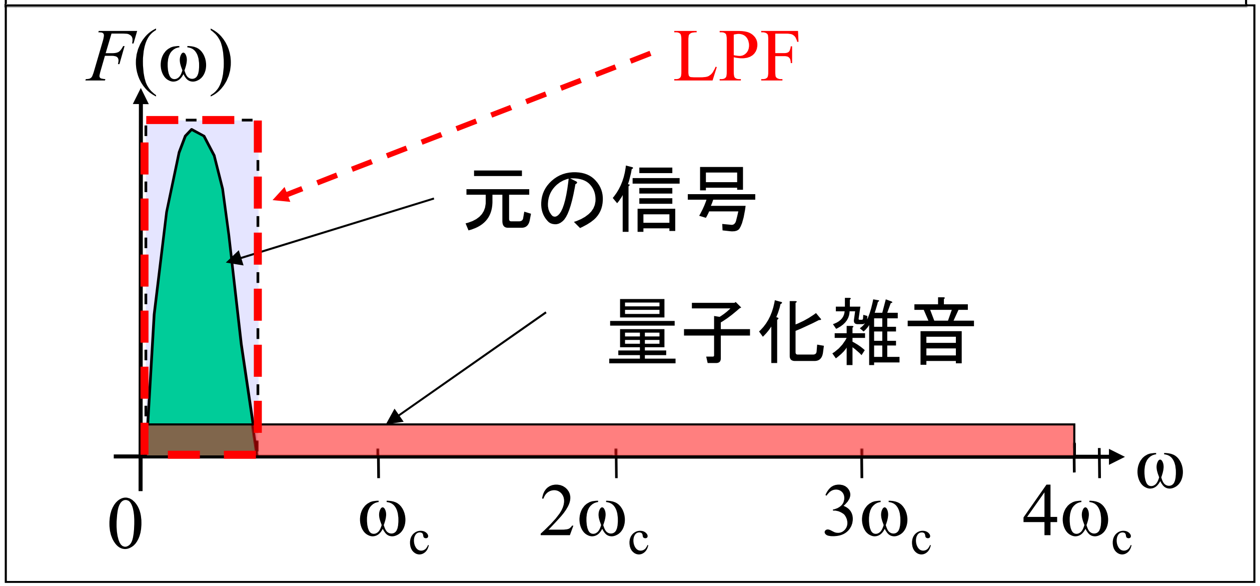
ダイナミックレンジ：入力正弦波の実効値と雑音実効値の比で定義した場合、$6.02N+10\log M+1.76$ [dB]

N: ADCのビット数

オーバーサンプリングの効果



通常のサンプリング

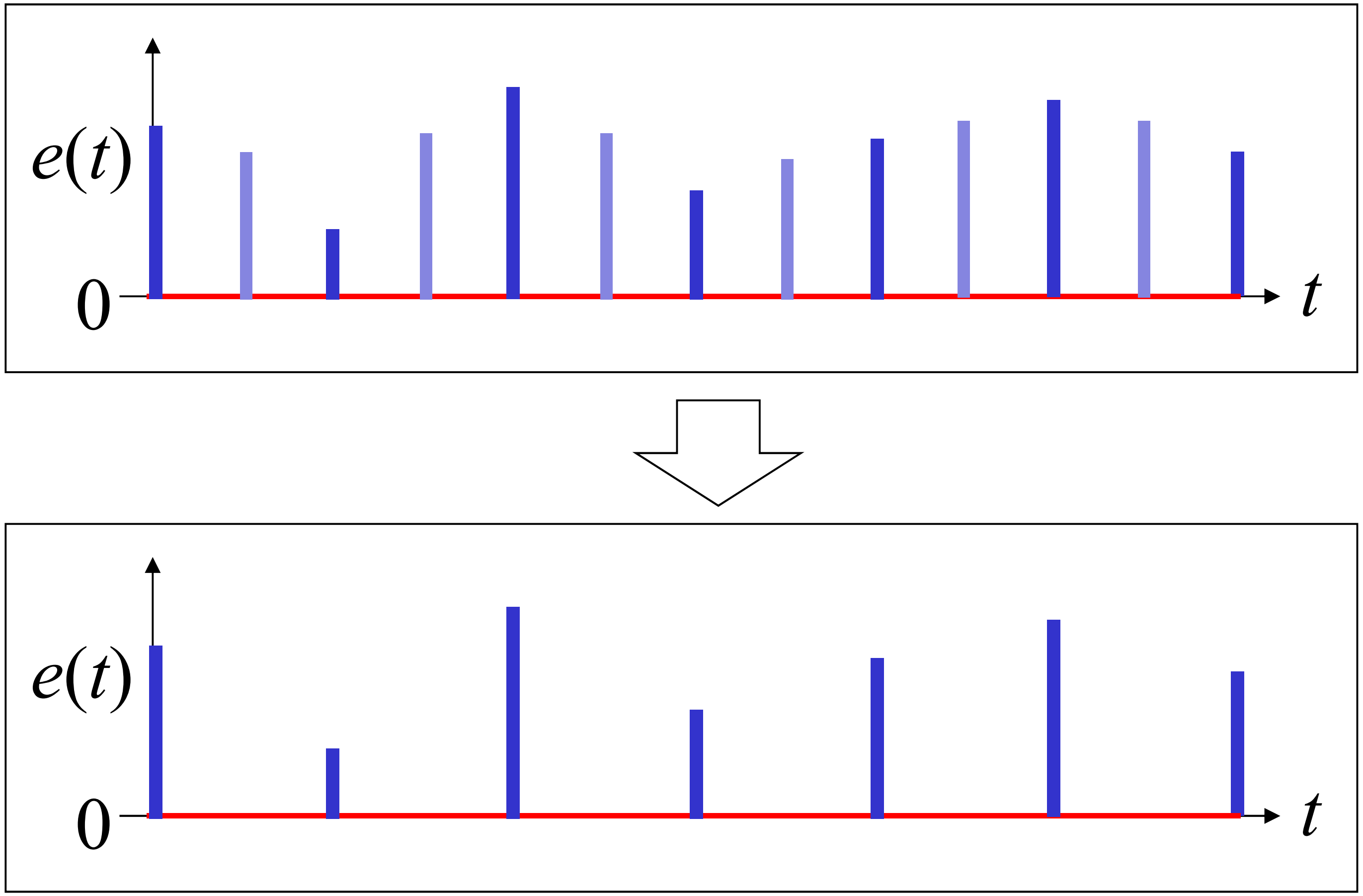


オーバーサンプリング

量子化雑音の拡散

デシメーション

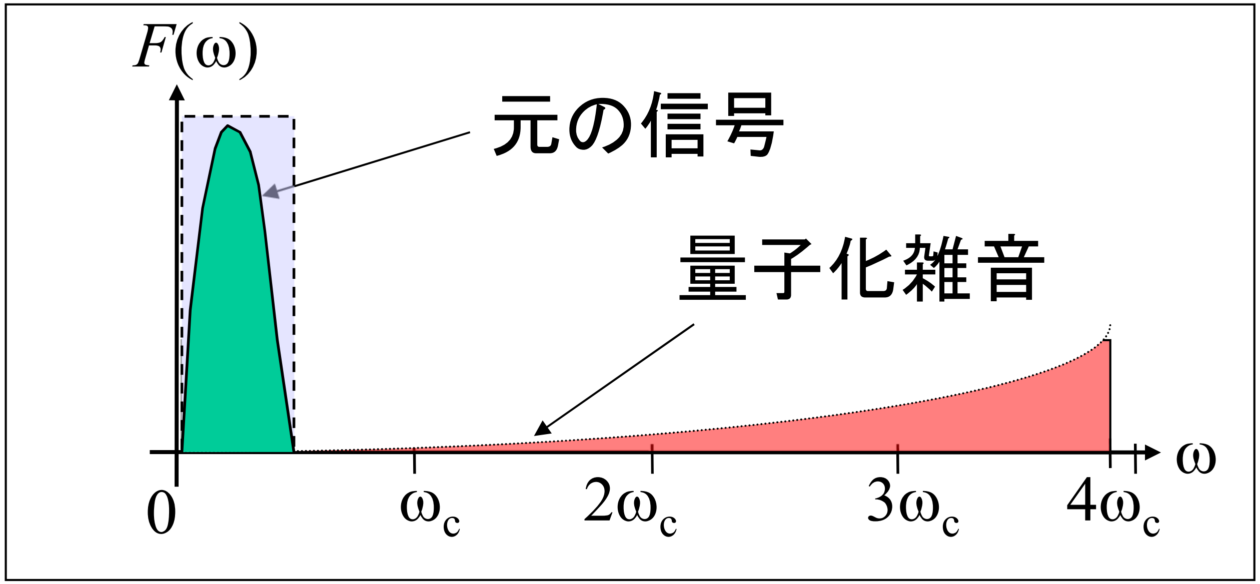
過剰なデータの消去（データ量の低減）



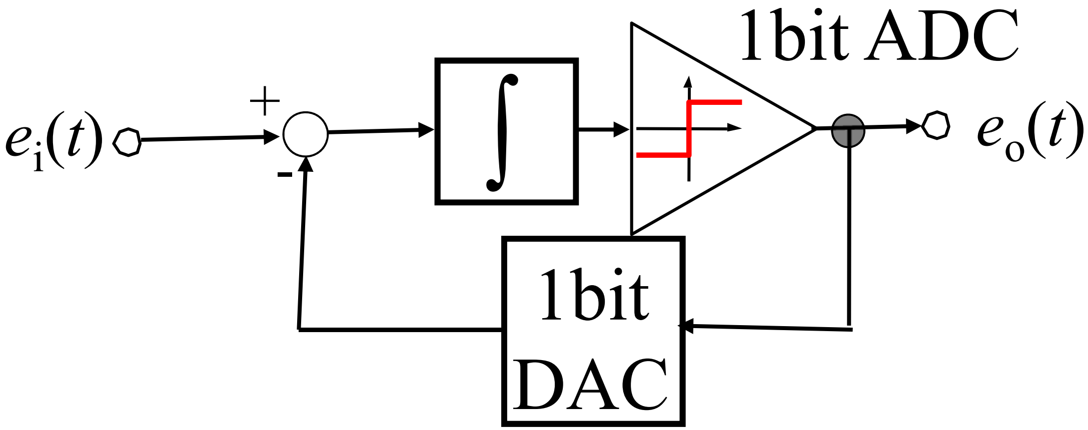
デシメーション前に十分なエイリアシング抑圧必須

⇒ デシメーションフィルタ

ノイズシェーピングによる量子化雑音低減

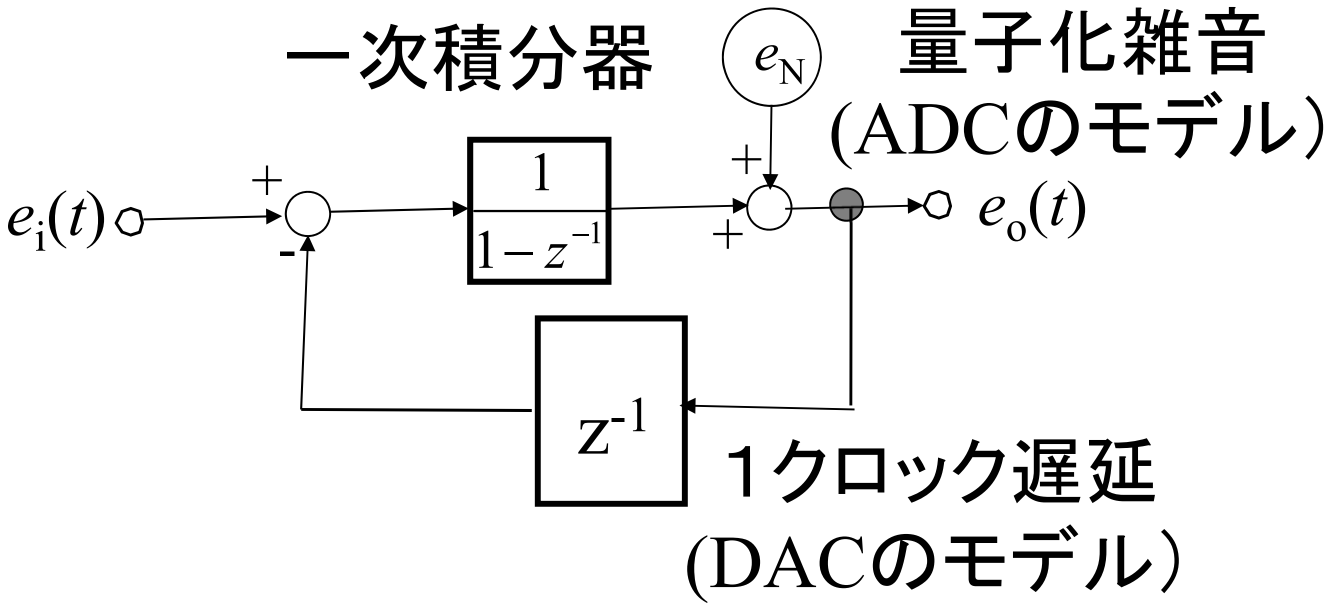


量子化雑音のスペクトラムを主に高域に拡散



一次シグマ･デルタA/D変換器

一次シグマ･デルタA/D変換器のモデル化



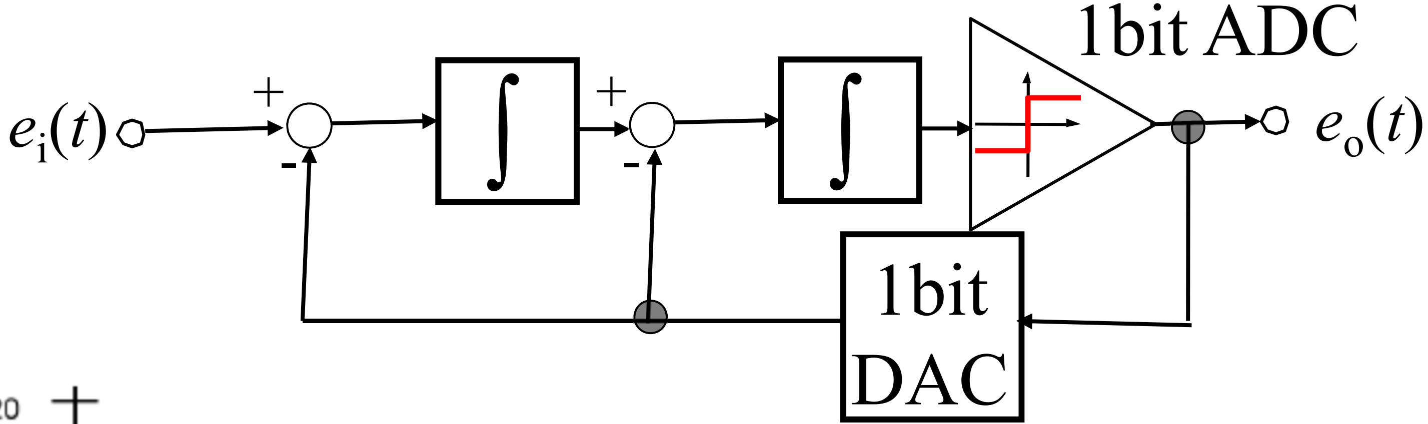
$$E_o(z) = \frac{E_i(z) - z^{-1}E_o(z)}{1-z^{-1}} + E_N$$

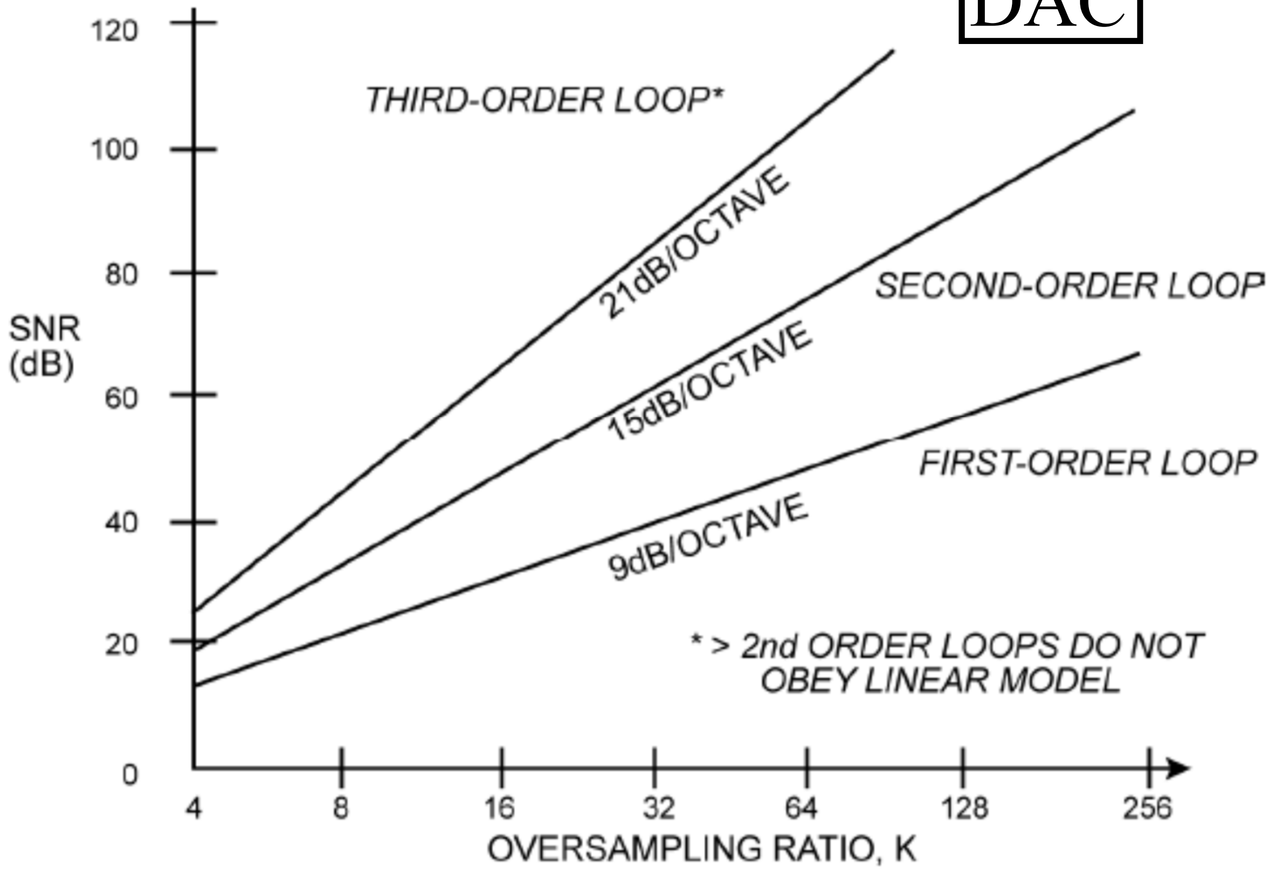
⇓

$$E_o(z) = E_i(z) + \boxed{(1-z^{-1})}E_N$$

量子化雑音の
周波数特性

二次シグマ･デルタA/D変換器



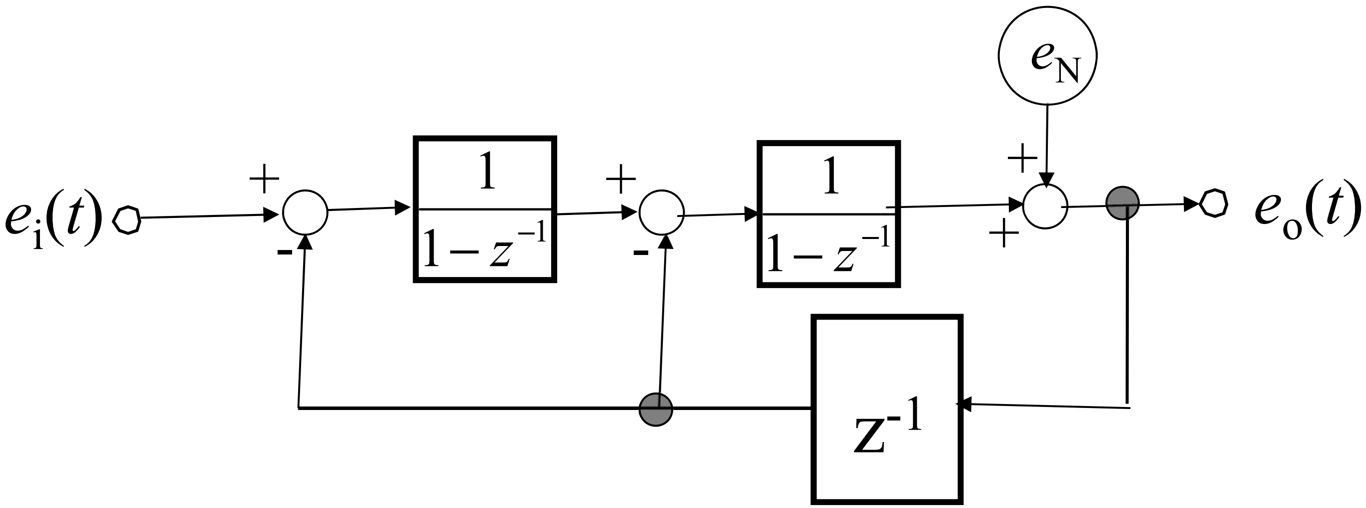


さらに次数を上げるとSNRの向上

ただし安定性に難

http://www.analog.com/media/jp/technical-documentation/application-notes/AN-283_jp.pdf

二次シグマ･デルタA/D変換器のモデル化

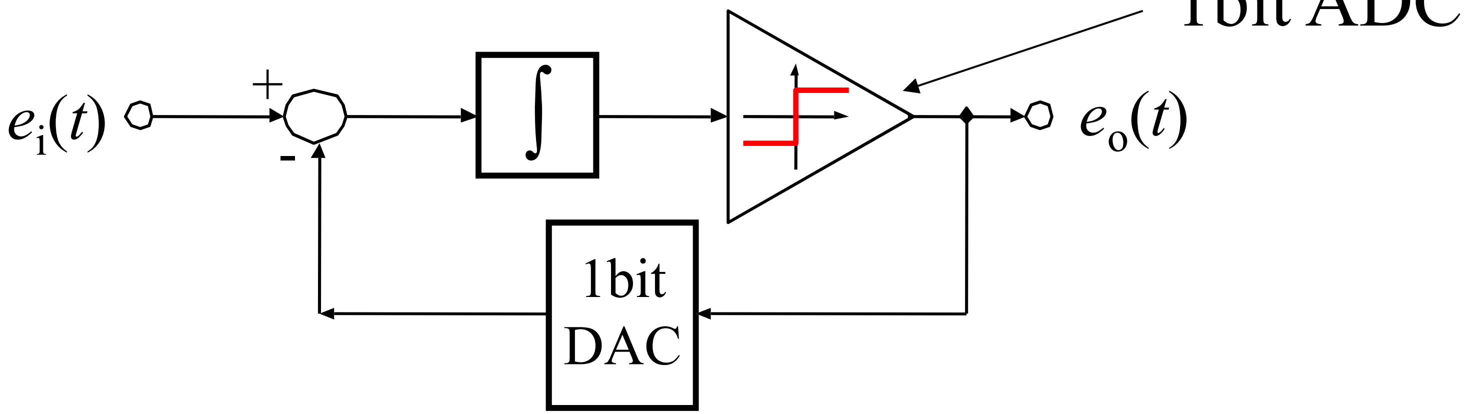


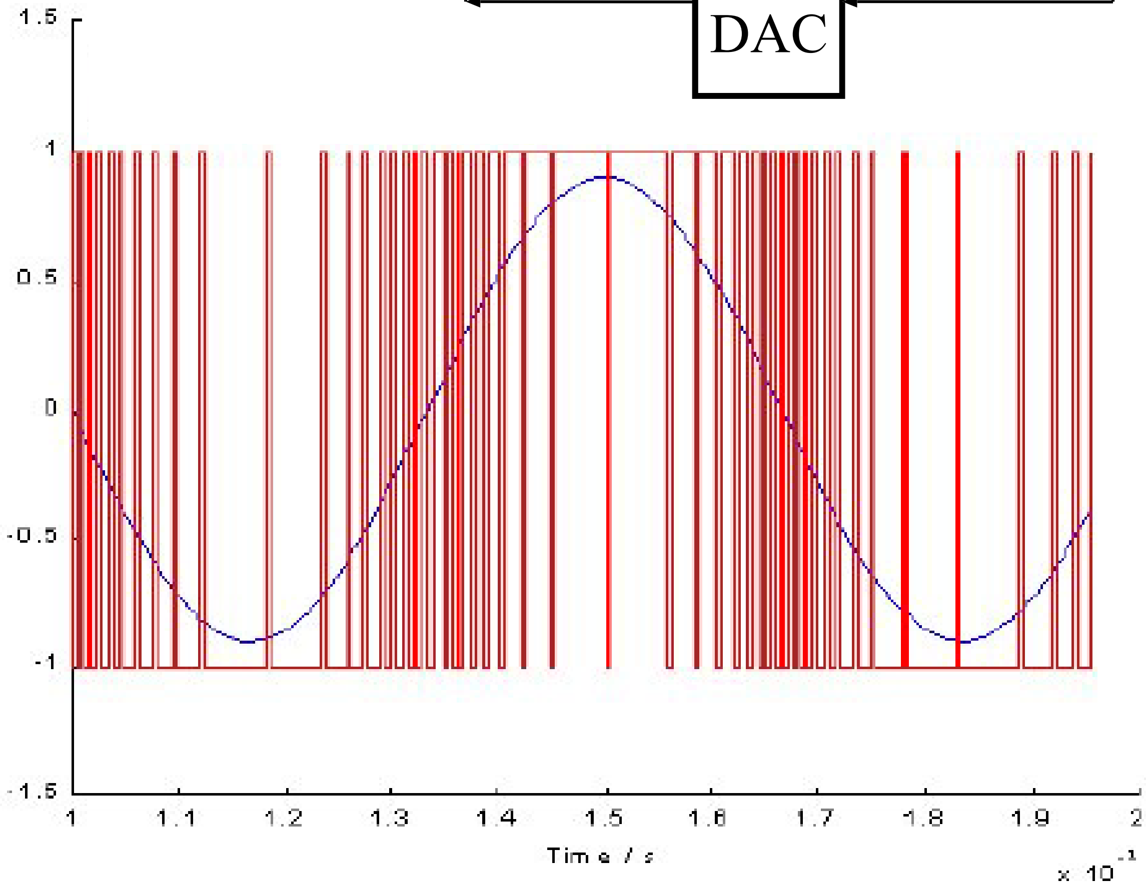
$$E_o(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}\left[\frac{E_i(z) - z^{-1}E_o(z)}{1-z^{-1}} - z^{-1}E_o(z)\right] + E_N$$

$$E_o(z) = E_i(z) + \boxed{(1-z^{-1})^2} E_N$$

量子化雑音のみ周波数特性

シグマデルタAD変換器の出力波形



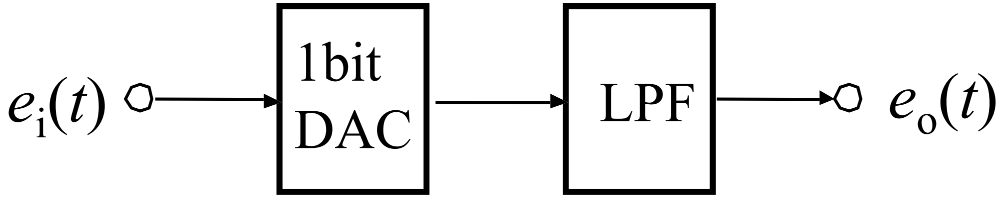


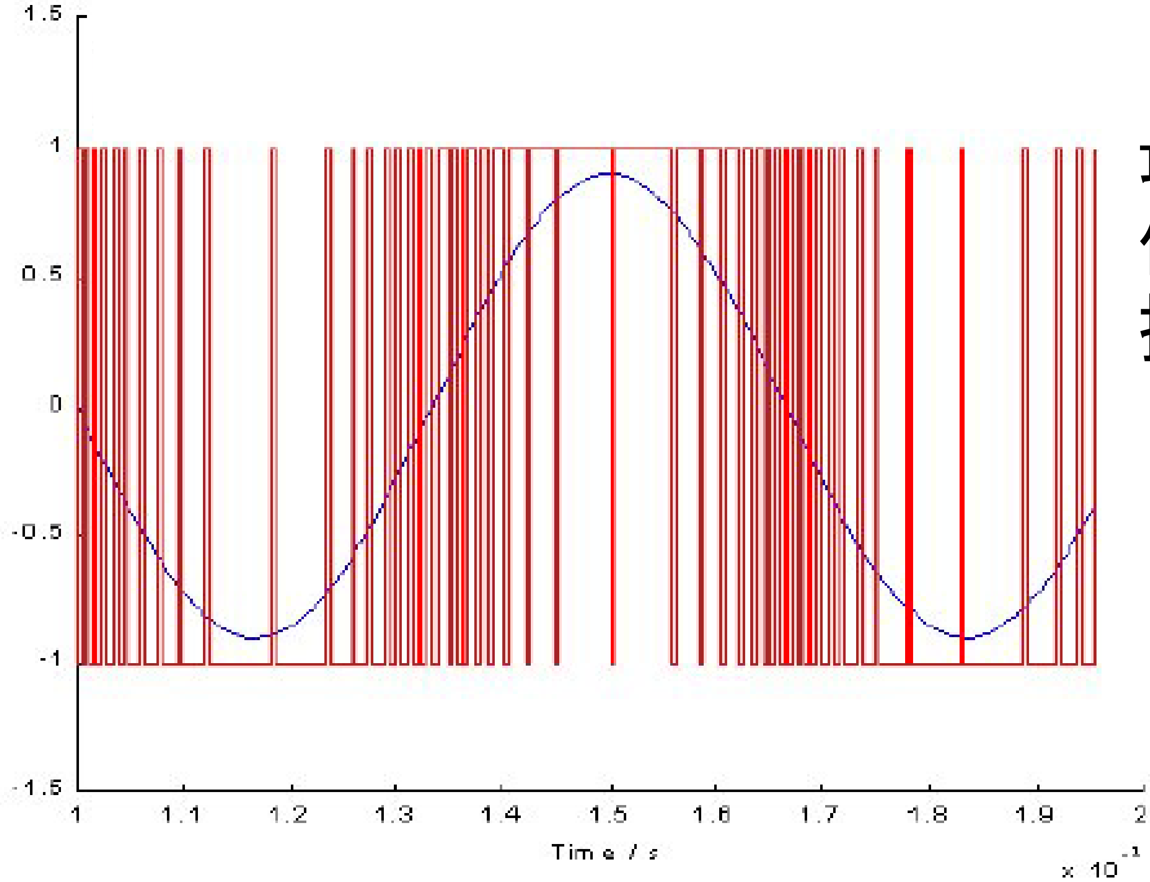
パルス幅変調(PWM)

＝パルス幅によって
振幅を表現

マイクロプロセッサ
で直接出力可能
⇒　1 bit Audio

PWM波から元信号の再生は？

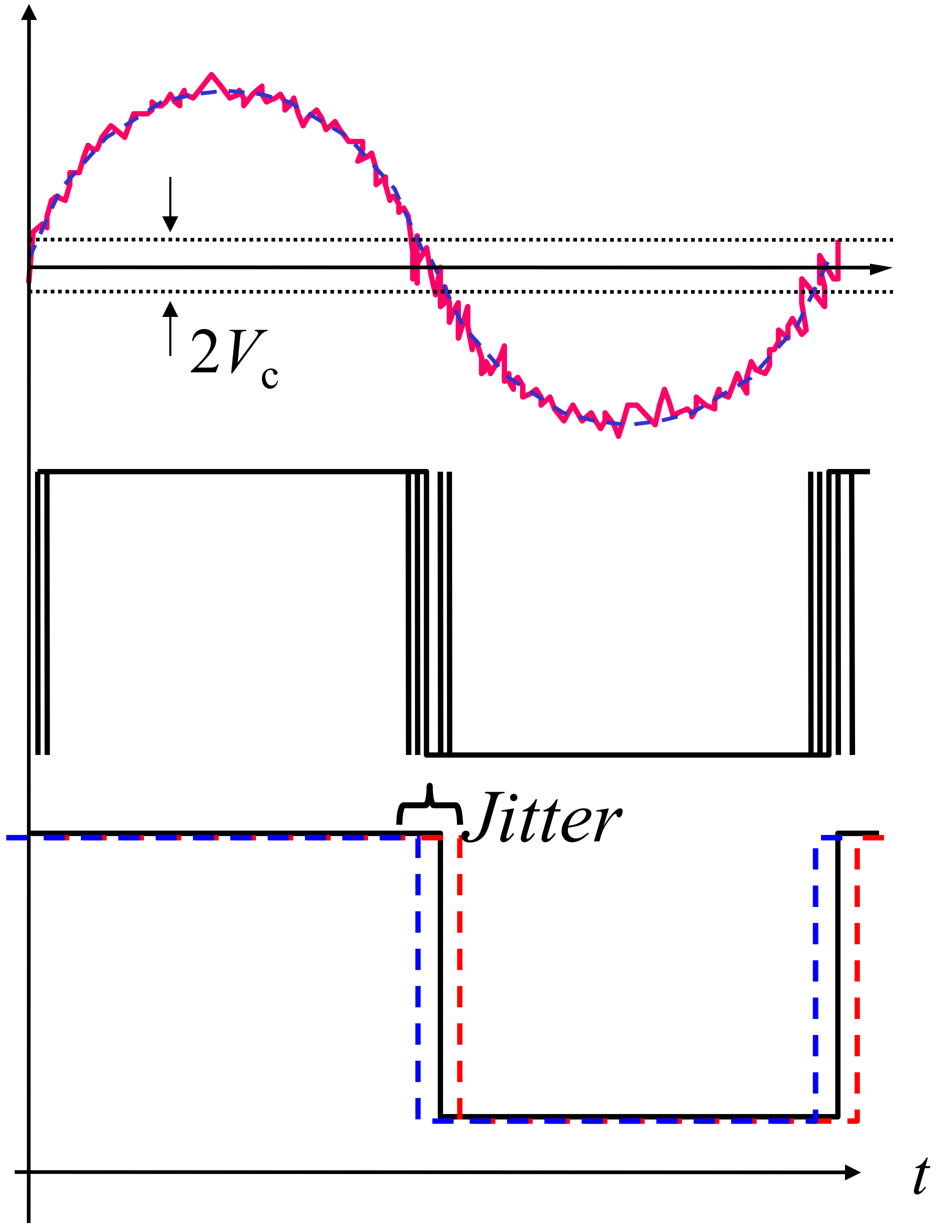




最大周波数までの低域通過フィルタを挿入！

世に言う1 bit
オーディオ

雑音重畳によるジッタの発生



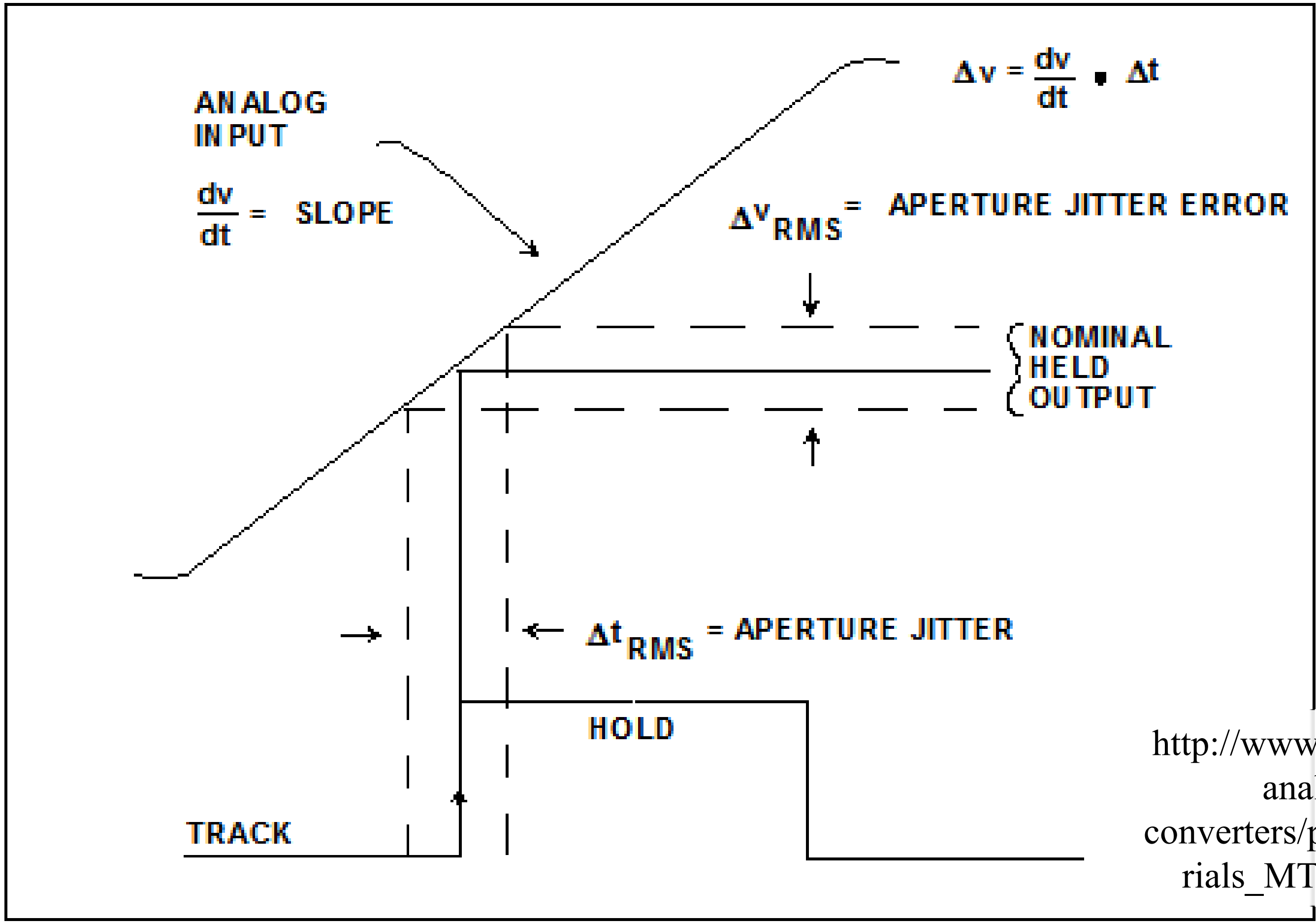
雑音を含むクロック

クロック再生

ヒステリシス無しの場合

ヒステリシス有りの場合

高速AD変換に対するジッタの影響

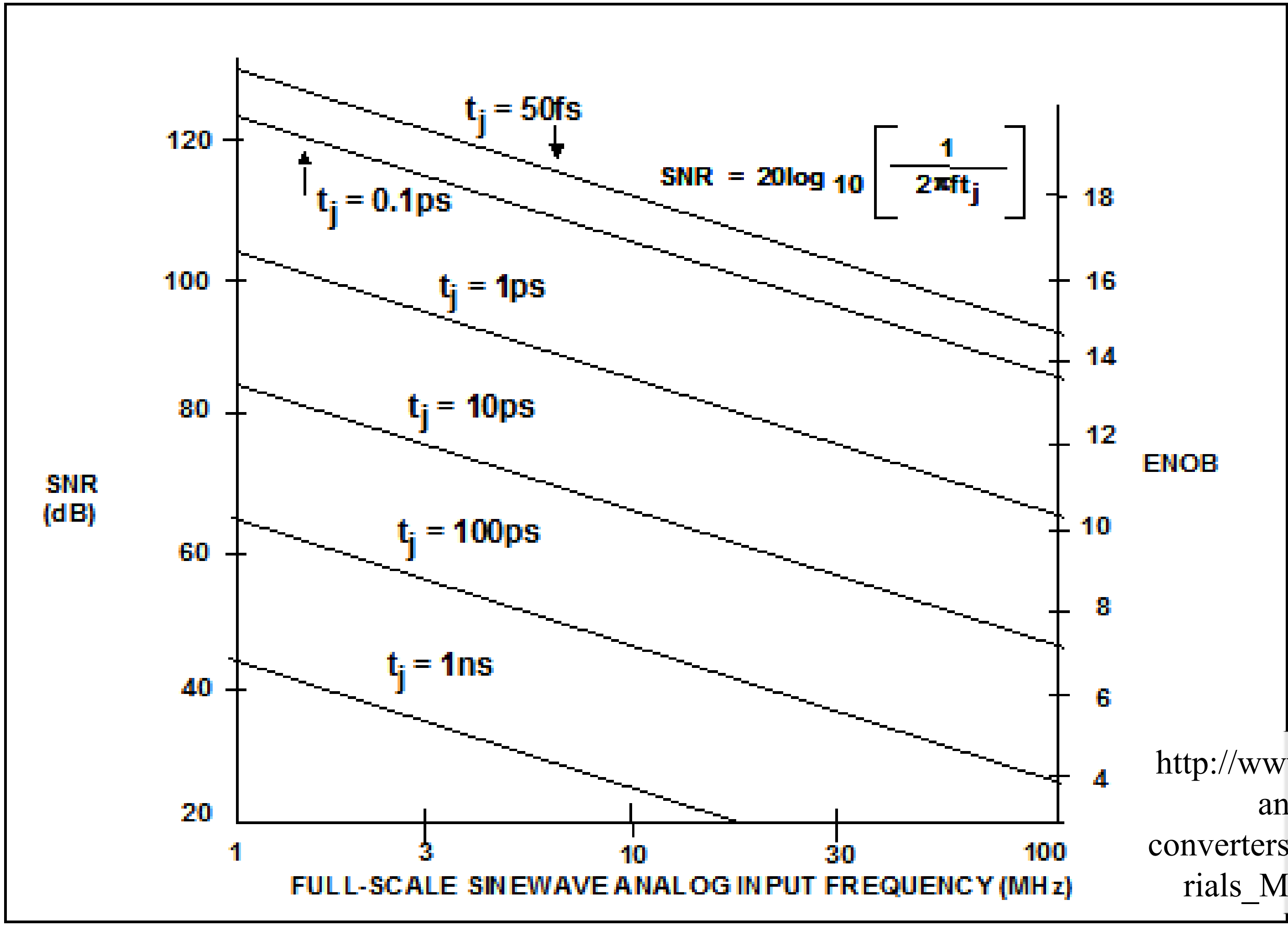


http://www.analog.com/jp/digital-to-analog-converters/da-converters/products/tutorials/CU_tutorials_MT-007/resources/fca.html

クロックの揺らぎ(ジッタ)が振幅変動(誤差)を発生

周波数が上がるほどジッタの影響大

周波数･ジッタとAD変換精度の関係



http://www.analog.com/jp/digital-to-analog-converters/da-converters/products/tutorials/CU_tutorials_MT-007/resources/fca.html

アンダーサンプリング

標本化周波数の整数倍の特定帯域の信号のみを抽出 ⇨ 帯域通過型AD変換器