

令和2年9月25日版

伝送工学

Part 4: 分布定数回路

千葉大学工学部

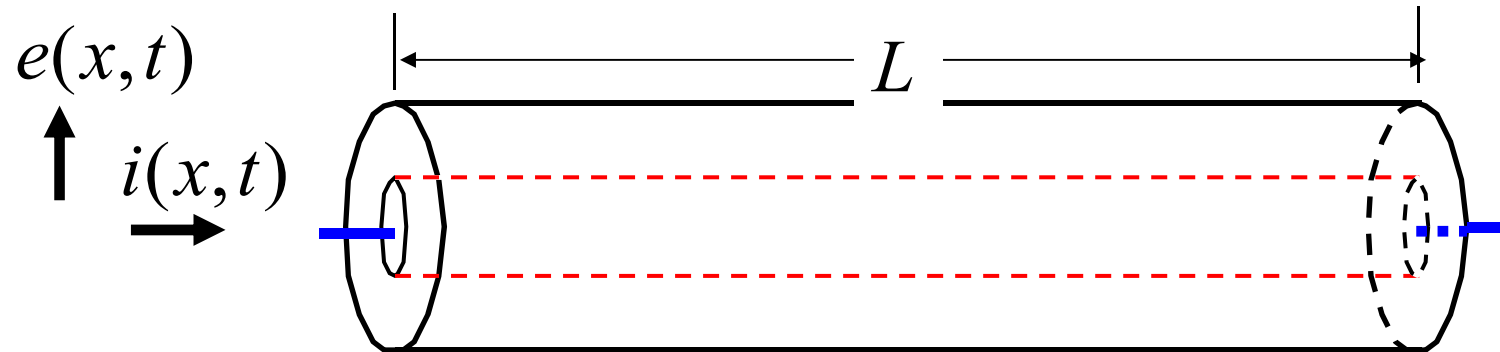
総合工学科電気電子工学コース

橋本研也

k.hashimoto@ieee.org

<http://www.te.chiba-u.jp/lab/ken>

同軸線路 (径が波長より十分小)



$$-\frac{\partial e}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial e}{\partial t} + Ge$$

静電界、静磁界では

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \log(b/a)$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\log(b/a)}$$

e : 電圧

i : $+x$ 方向の電流

L : 単位長当たりのインダクタンス

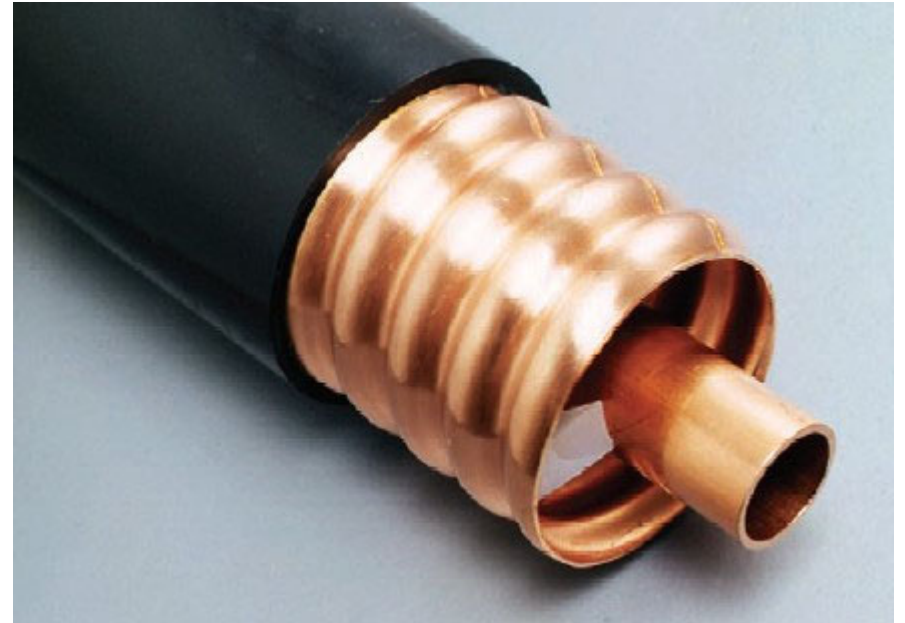
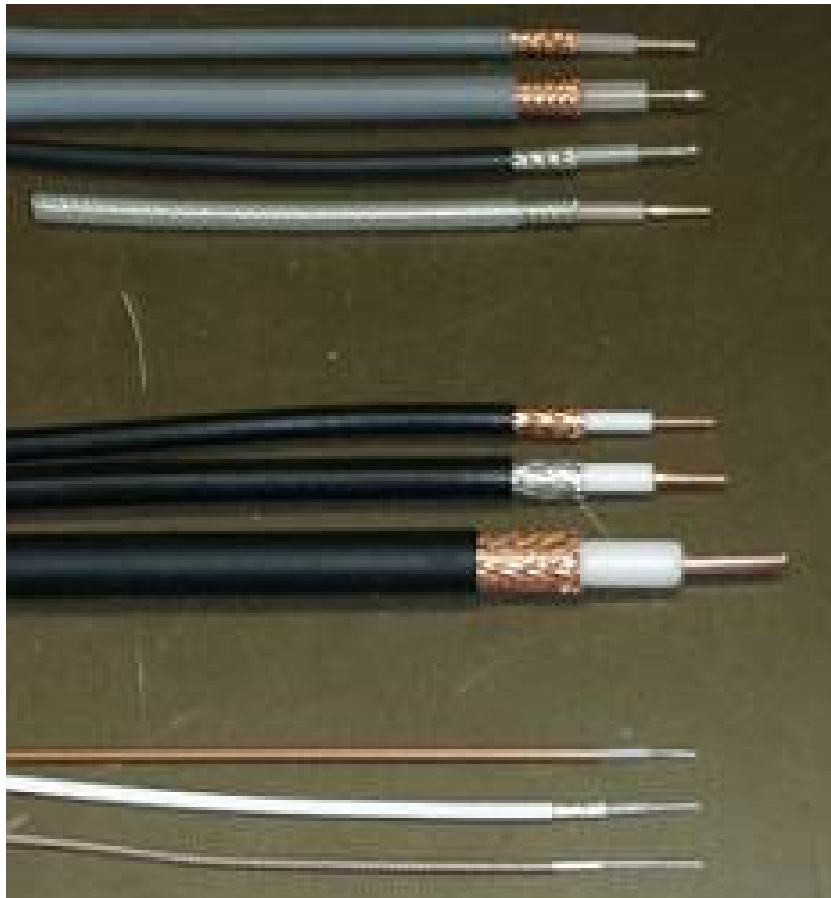
R : 単位長当たりの抵抗

C : 単位長当たりのキャパシタンス

G : 単位長当たりの漏洩コンダクタンス

同軸ケーブルの例

太いのや細いの様々



同軸ケーブル用コネクタも様々

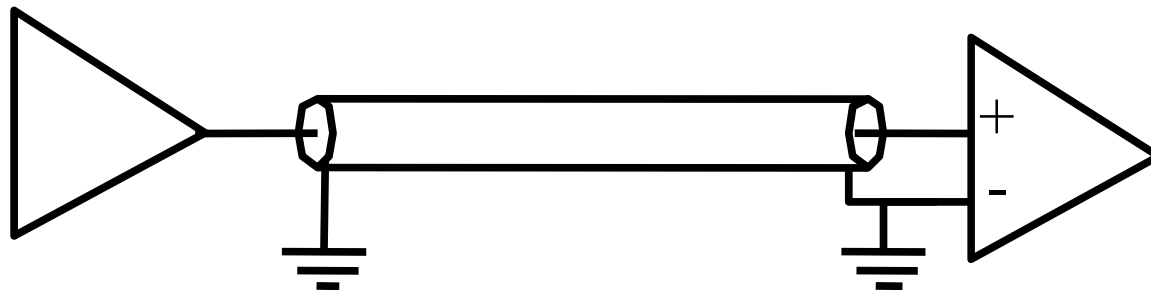


ケーブルの選択

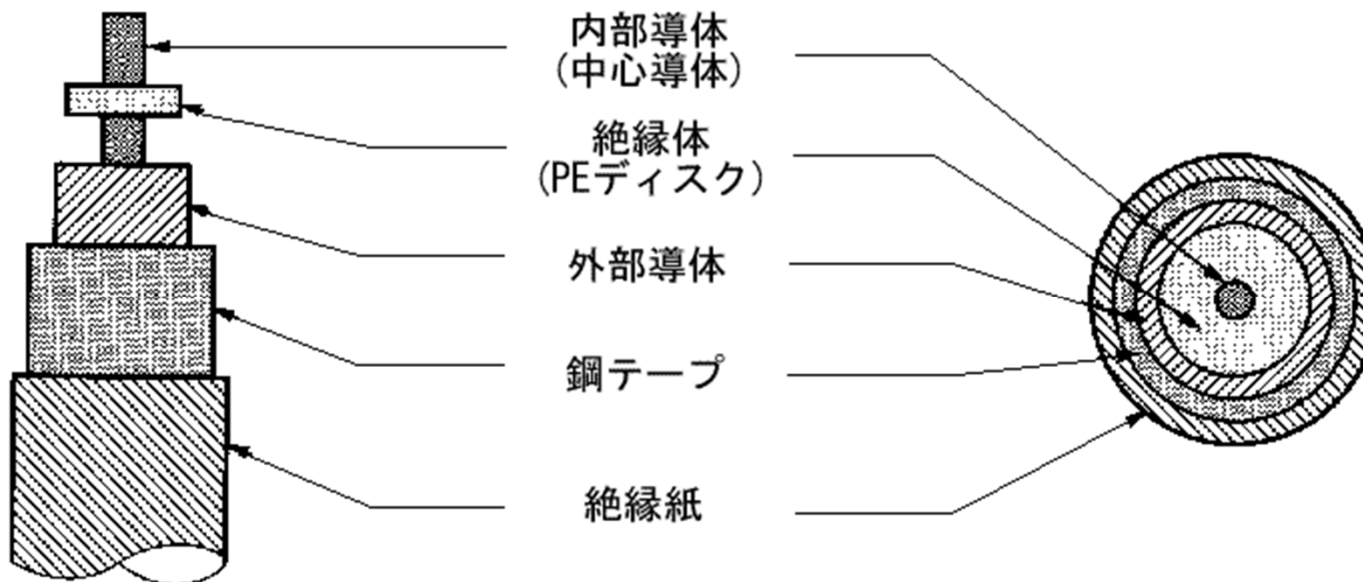
1. 特性インピーダンス
2. 使用最高周波数
3. 伝送距離(伝搬損失)
4. 最高電力
5. コネクタ
6. 可撓性
7. 再現性
8. 使用温度
9. 使用環境
10. 価格

数百円程度のものから
数十万程度のものまで
各種あり。。。

不平衡伝送

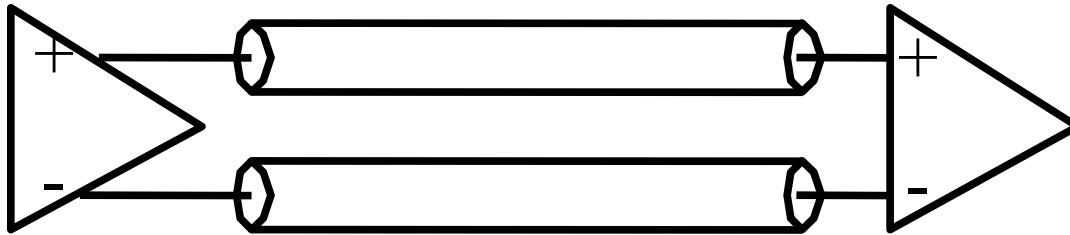


- ・導体は接地、内部導体で信号伝送
- ・外部導体により外来雑音遮蔽



<http://www.kurejbc.com/technical/technical-6.htm>

平衡伝送



- ・両導体間の電位差で信号伝送
- ・両導体間の距離が短ければ、外来雑音は両導体に同じ電位発生＝電位差発生せず

静電界、静磁界では

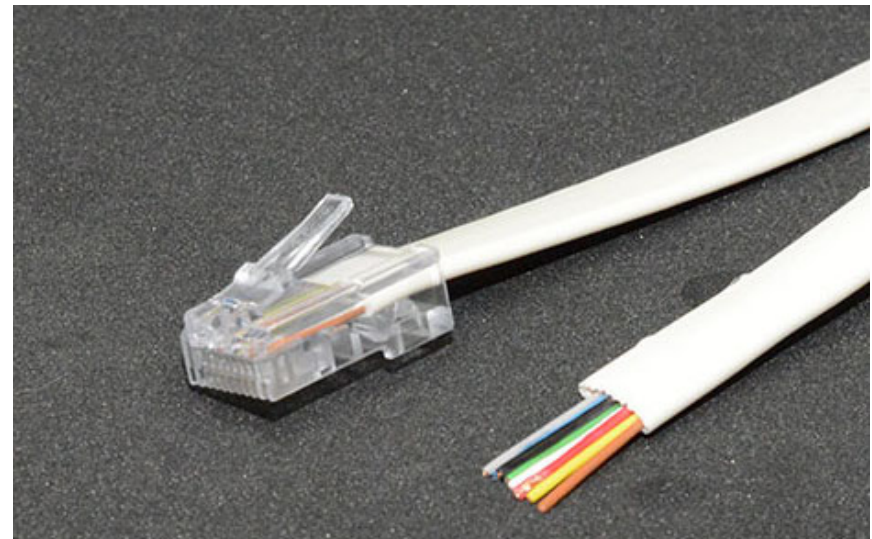
$$L = \frac{\mu}{\pi} \log \left[(d - a) / a \right]$$

$$C = \frac{\pi \varepsilon}{\log \left[(d - a) / a \right]}$$

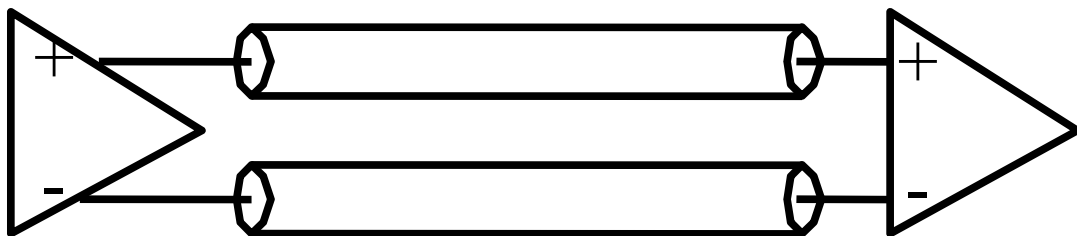
L : 単位長当たりのインダクタンス

R : 単位長当たりの抵抗

平衡ケーブルの例

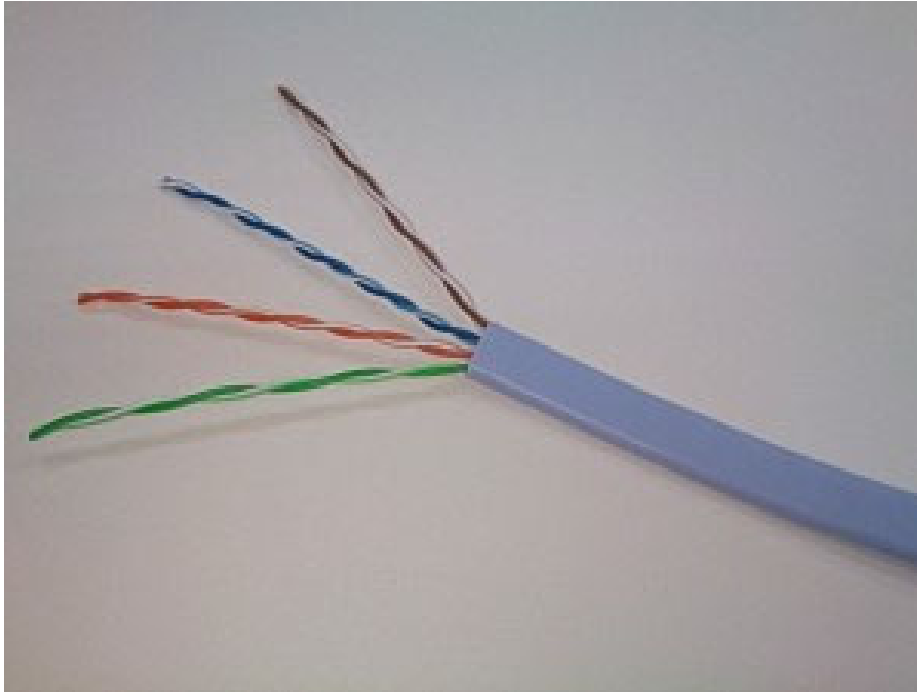


より線

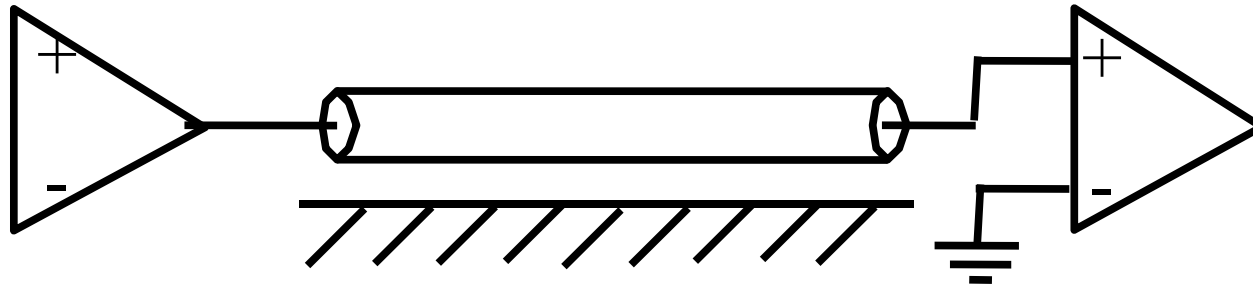


	構 成 方 法		
対			2本の導体（心線ともいう）を直接撚り合わせたもの
星型カッド			4本の導体を正方形の四角に配列し共通の軸回りに一括して撚り合わせたもの
DMカッド			対に撚り合わせた心線を一對ずつ更に撚り合わせたもの

より線平衡ケーブルの例



一方が地面だと不平衡伝送



静電界、静磁界では

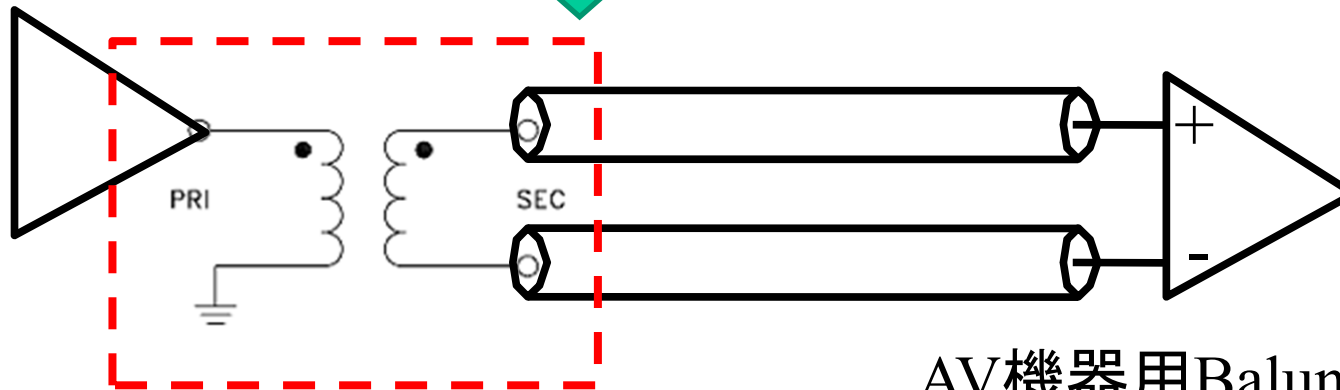
送電線のモデル

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \log \left[(d - a) / a \right]$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\log \left[(d - a) / a \right]}$$

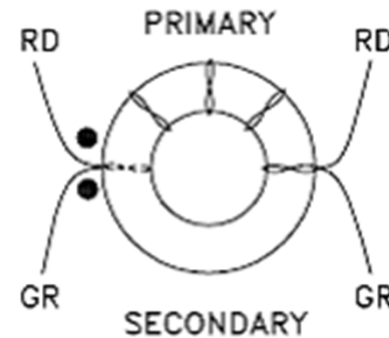


平衡伝送と不平衡伝送の混在不可



平衡不平衡変換器
(Balun)

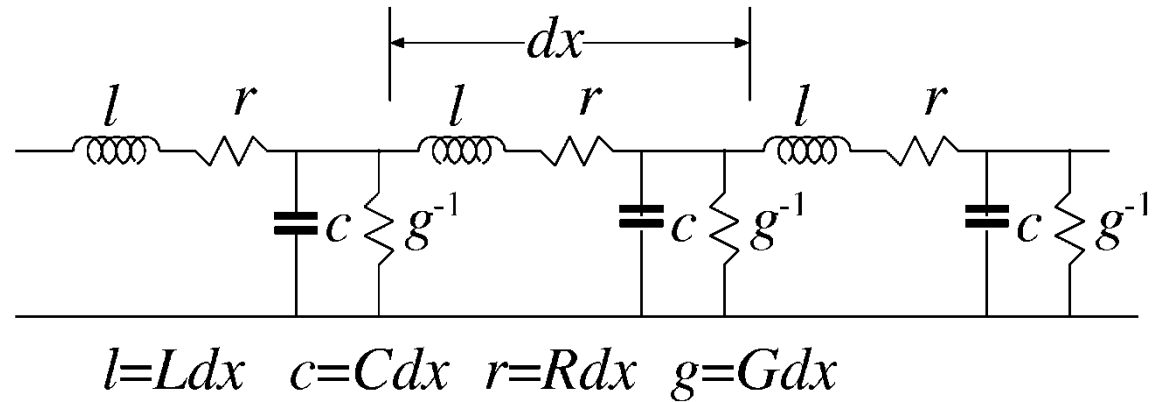
AV機器用Balun



電信方程式

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial e}{\partial t} + Ge$$

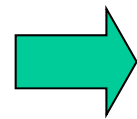


回路的表現

R, G を無視すると

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial e}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

ここで $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$e(x, t) = e_+(t - x/v) + e_-(t + x/v)$$

$$i(x, t) = i_+(t - x/v) + i_-(t + x/v)$$

+xへの進行波 -xへの進行波

$$e(x, t) = e_+(t - x/v) + e_-(t + x/v) \quad \text{から}$$

$$i(x, t) = i_+(t - x/v) + i_-(t + x/v)$$

$$\frac{\partial e(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial e_+(t - x/v)}{\partial(t - x/v)} + \frac{\partial e_-(t + x/v)}{\partial(t + x/v)}$$

$$\frac{\partial e(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial e_+(t - x/v)}{\partial(t - x/v)} + \frac{1}{v} \frac{\partial e_-(t + x/v)}{\partial(t + x/v)}$$

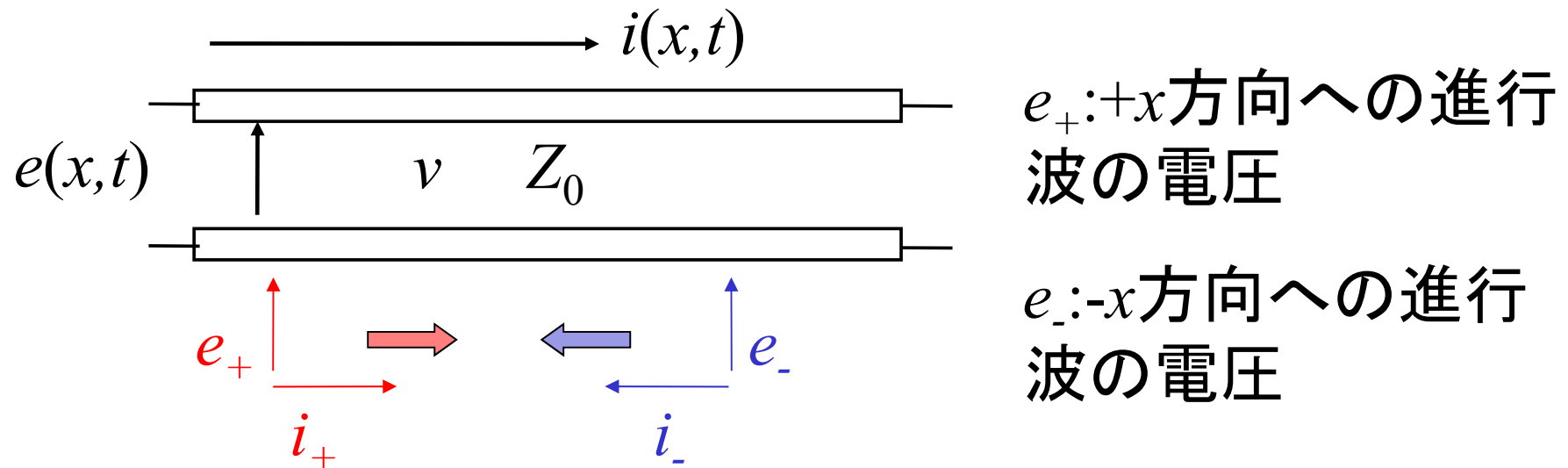
$$-\frac{\partial e}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{に代入すると} \quad \frac{\partial \left[e_{\pm}(t \mp x/v) \mp \sqrt{\frac{L}{C}} i_{\pm}(t \mp x/v) \right]}{\partial(t \mp x/v)} = 0$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial e}{\partial t}$$

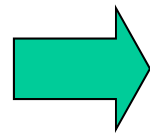
$$\Rightarrow e_{\pm}(t \mp x/v) = \pm \sqrt{\frac{L}{C}} i_{\pm}(t \mp x/v)$$

特性インピーダンス Z_0

$$e_{\pm} = \pm Z_0 i_{\pm} \quad \text{ここで} \quad Z_0 = \sqrt{L/C}$$



$$Z_0 = \frac{e_{\pm}}{i_{\pm}}$$



$$e(x, t) = e_+(t - x/v) + e_-(t + x/v)$$

$$i(x, t) = Z_0^{-1} [e_+(t - x/v) - e_-(t + x/v)]$$

誘電体材料の場合

特性インピーダンス

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{z_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \log(b/a) & \text{同軸線路} \\ \frac{z_0}{\pi\sqrt{\epsilon_r}} \log(b/a) & \text{平行線路} \end{cases}$$

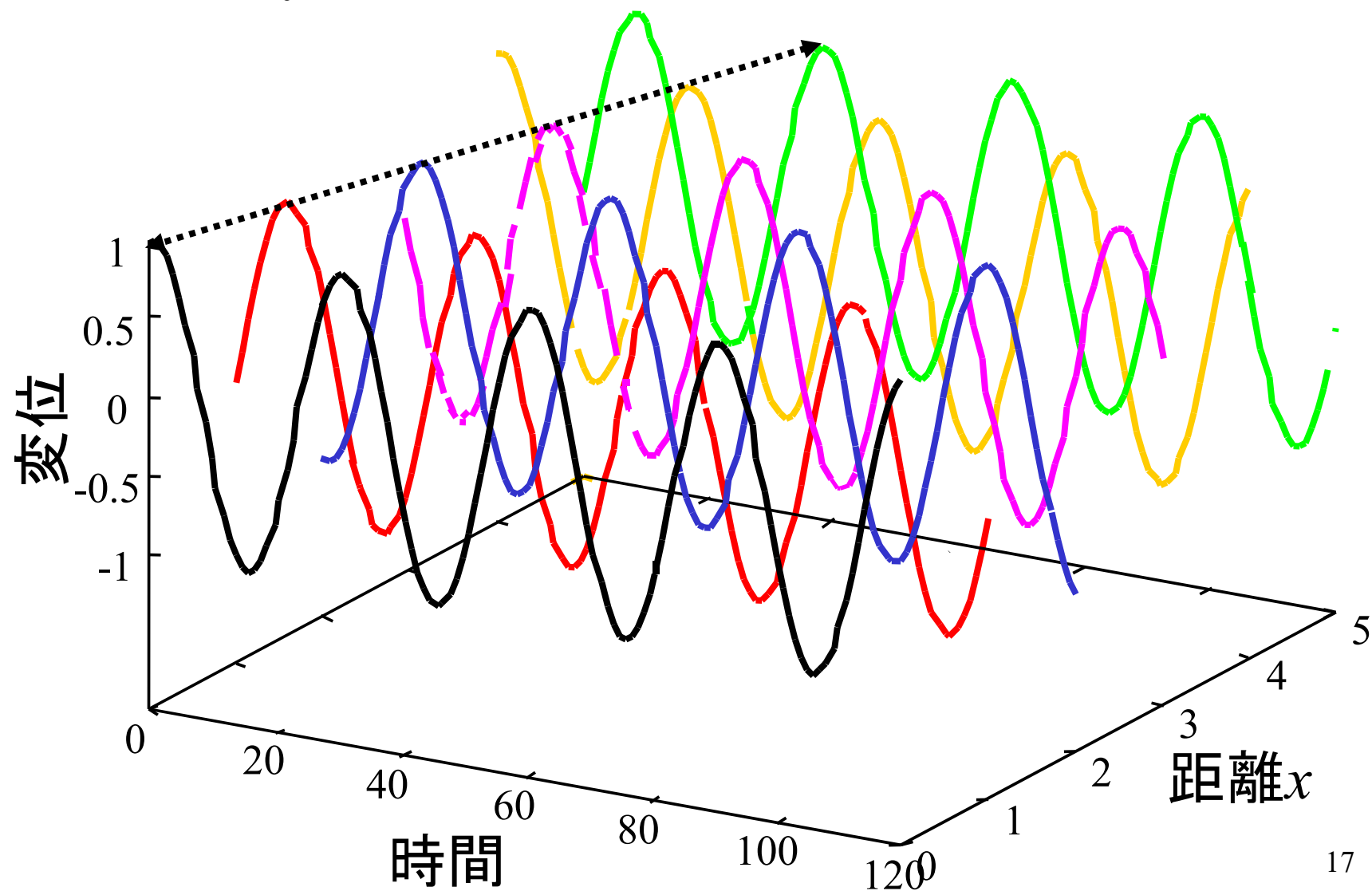
$$z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \quad : \text{真空の特性インピーダンス (376.7 } \Omega \text{)}$$

短縮率（真空中より波長がどれだけ短いかな）

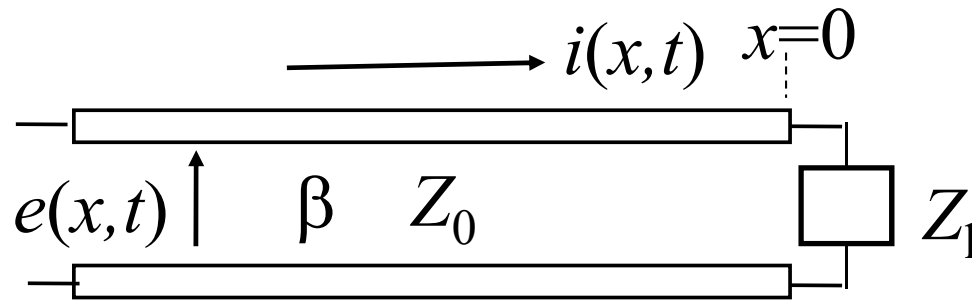
$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad c : \text{真空の電磁波速度 (3} \times 10^8 \text{ m/s)}$$

正弦波の伝播

$$u = u_0 \cos \{2\pi f (t - x / v)\}$$



負荷 Z を接続した場合



$e(0, t) = Z_1 i(0, t)$ であるから

($x=0$ での) 電圧反射係数 Γ_1

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{A_-}{A_+} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}$$

伝送線路内での界分布

$$e(x, t) = A_+ [1 + \Gamma \exp(+2j\beta x)] \exp(j\omega t - j\beta x)$$

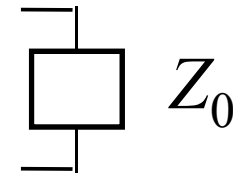
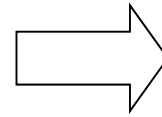
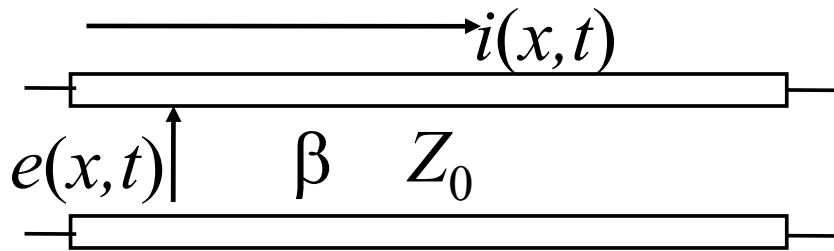
$$i(x, t) = Z_0^{-1} A_+ [1 - \Gamma \exp(+2j\beta x)] \exp(j\omega t - j\beta x)$$

振幅の x 依存性は時間に依らず $\Rightarrow$ 定在波 (Standing Wave)

反射が無ければ(無限に長ければ)

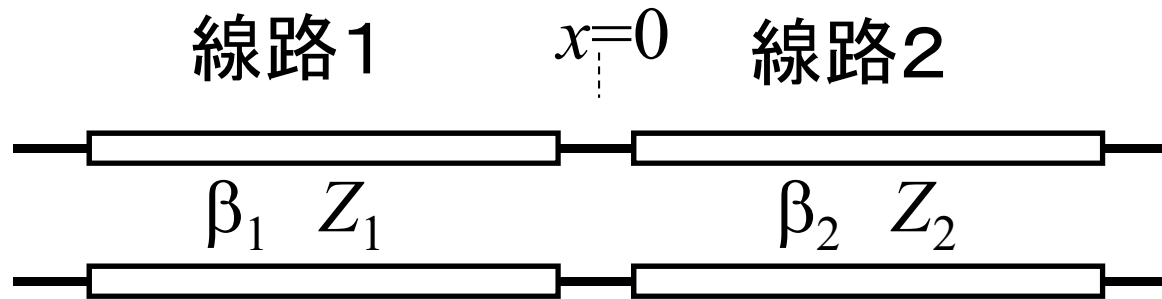
$$e(x) = [e_+ \exp(-j\beta x) + e_- \exp(+j\beta x)] \exp(j\omega t)$$

$$i(x) = Z_0^{-1} [e_+ \exp(-j\beta x) - e_- \exp(+j\beta x)] \exp(j\omega t)$$



特性インピーダンスの負荷と等価

境界での反射



線路1中では $\begin{cases} V(x) = V_+^{(1)} \exp(-j\beta_1 x) + V_-^{(1)} \exp(+j\beta_1 x) \\ I(x) = Z_1^{-1} [V_+^{(1)} \exp(-j\beta_1 x) - V_-^{(1)} \exp(+j\beta_1 x)] \end{cases}$

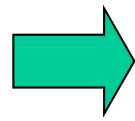
線路2中では $\begin{cases} V(x) = V_+^{(2)} \exp(-j\beta_2 x) + \cancel{V_-^{(2)} \exp(+j\beta_2 x)} \\ I(x) = Z_2^{-1} [V_+^{(2)} \exp(-j\beta_2 x) - \cancel{V_-^{(2)} \exp(+j\beta_2 x)}] \end{cases}$

反射が無いから

境界($x=0$)で V, I が連続

$$V_+^{(2)} = V_+^{(1)} + V_-^{(1)}$$

$$Z_2^{-1} V_+^{(2)} = Z_1^{-1} [V_+^{(1)} - V_-^{(1)}]$$



電圧反射
係数

電圧透過
係数

$$\Gamma = \frac{V_-^{(1)}}{V_+^{(1)}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$T = \frac{V_+^{(2)}}{V_+^{(1)}} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

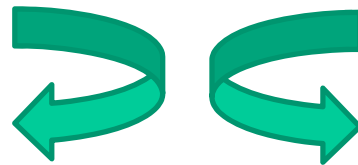
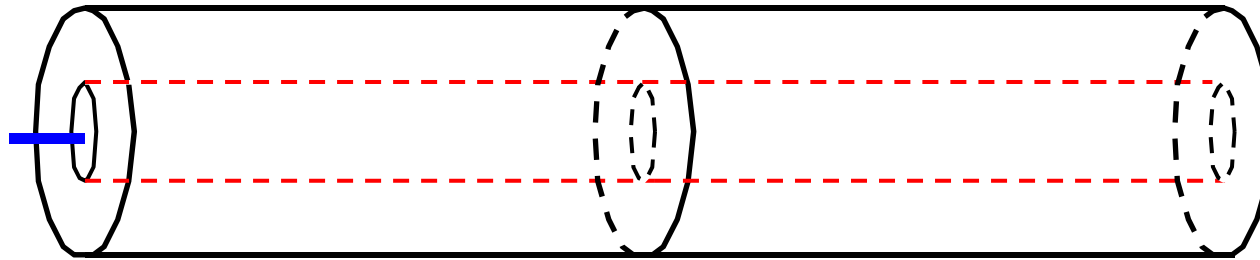
電圧透過係数は1より大きくなる！？

電力反射係数 $\Gamma_p = \frac{Z_1^{-1} |V_-^{(1)}|^2}{Z_1^{-1} |V_+^{(1)}|^2} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}$

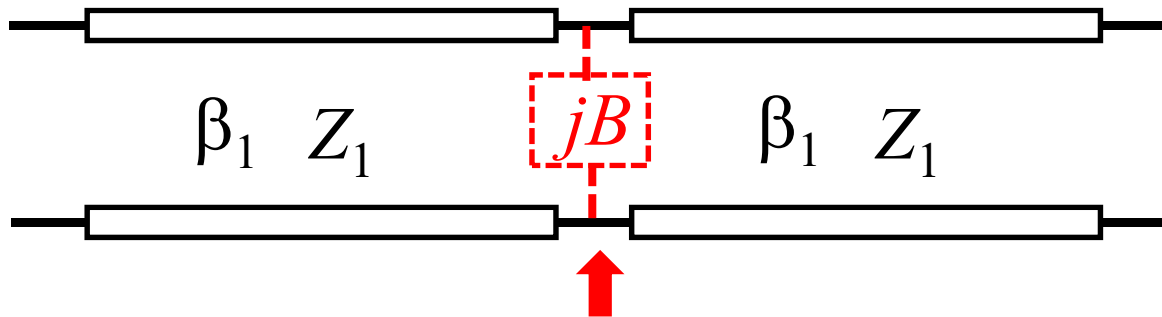
電力透過係数 $T_p = \frac{Z_2^{-1} |V_+^{(2)}|^2}{Z_1^{-1} |V_+^{(1)}|^2} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$

パワー保存則 $\Gamma_p + T_p = 1$

コネクタが悪いと



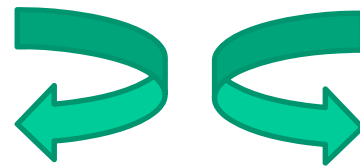
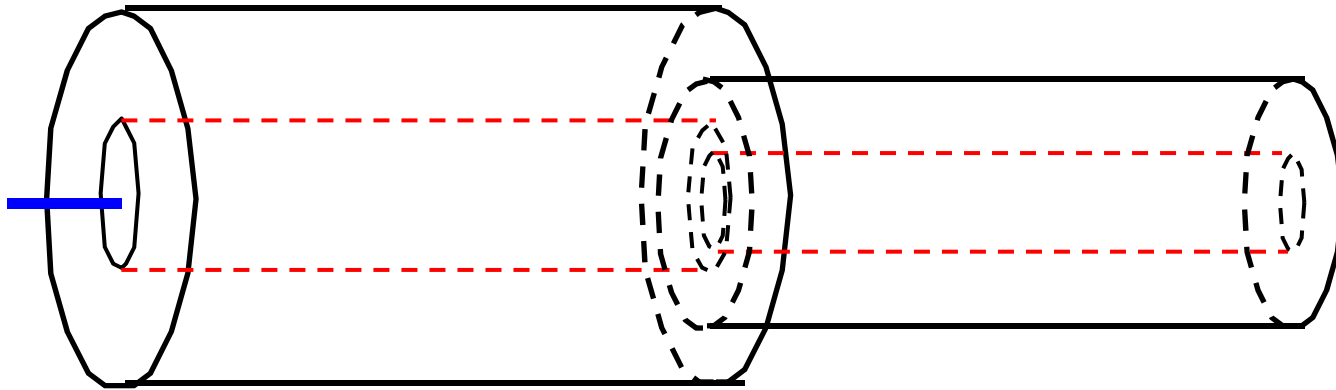
波動の反射



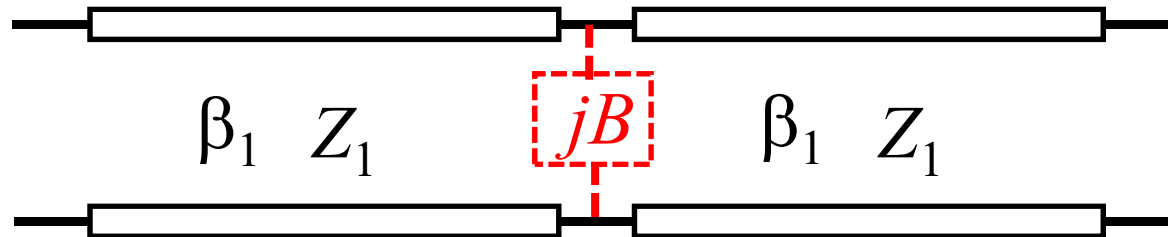
コネクタの影響

インピーダンスが同一でも反射発生！

ケーブル径が違ってても



波動の反射

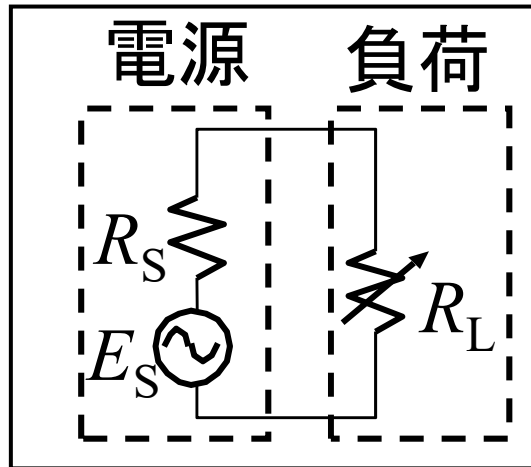


段差の影響

インピーダンスが同一でも反射発生！

インピーダンス整合

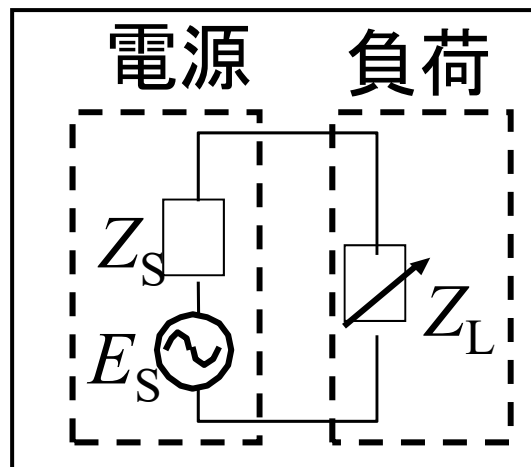
最大電力伝送の為に $R_L = R_S$



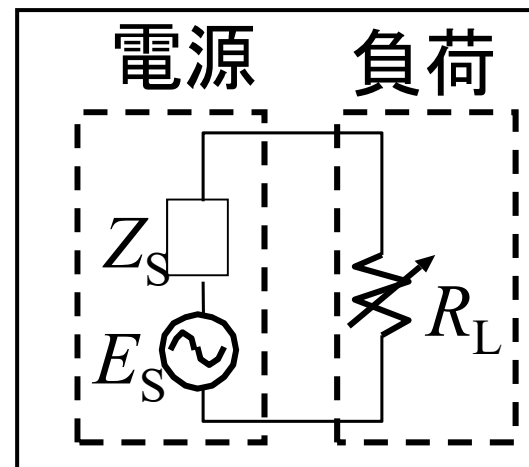
$$P_L = \frac{R_L |E_S|^2}{2(R_S + R_L)^2} \quad e_L = \frac{R_L E_S}{R_S + R_L}$$
$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{(R_S - R_L) |E_S|^2}{2(R_S + R_L)^3} = 0 \quad \text{である故}$$

最大出力の条件では $e_L = \frac{E_S}{2}$

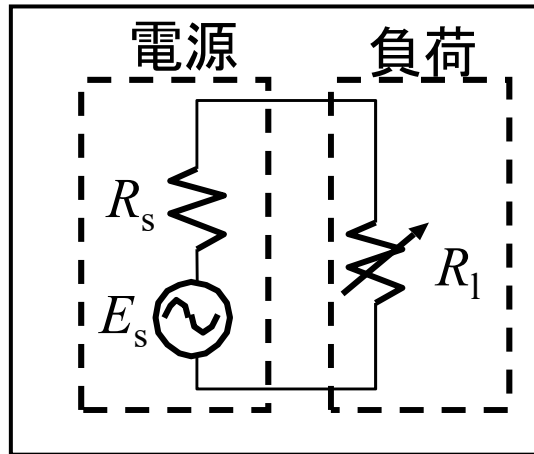
この場合 $Z_L = Z_S^*$



この場合 $R_L = |Z_S|$



最大電力伝送の為に $R_L = R_S$

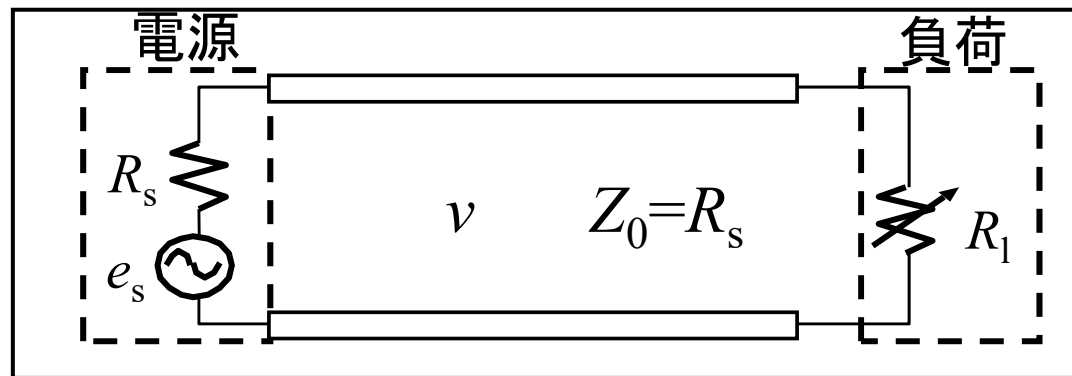


$$P_1 = \frac{R_l |E_s|^2}{2(R_s + R_l)^2} \quad e_L = \frac{R_l E_s}{R_s + R_l}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial R_l} = \frac{(R_s - R_l) |E_s|^2}{2(R_s + R_l)^3} = 0 \quad \text{である故}$$

最大出力の条件では $e_1 = \frac{e_s}{2}$

時系列的解析



$$\Gamma = \frac{R_l - R_s}{R_l + R_s}$$

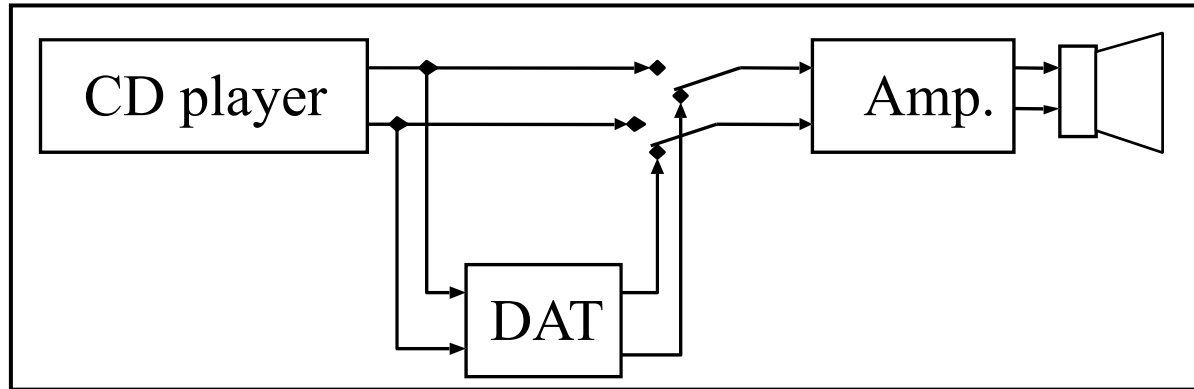
(1) $e_+(0) = \frac{E_s}{2}$
当初は $L = \infty$ と等価

(2) $\Gamma_0 e_+(L)$

(3) $e_+(L) + e_-(L) = e_+(L)(1 + \Gamma)$

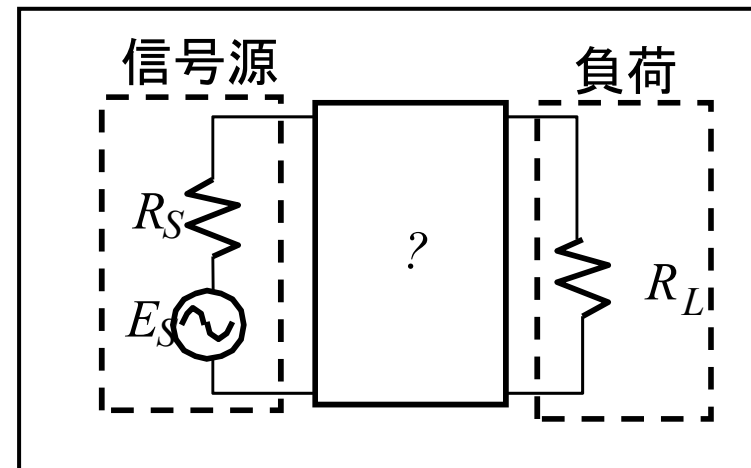
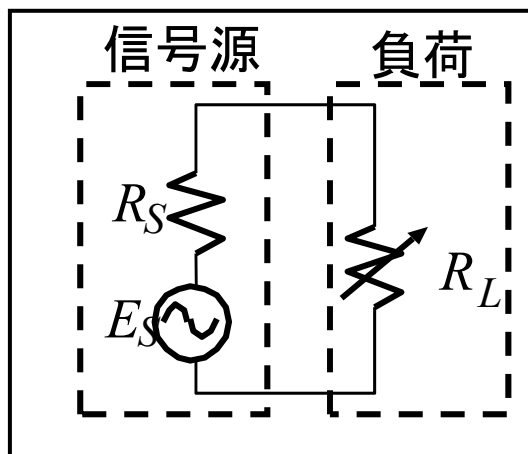
$R_0 = 0$ の時出力最大

低周波設計

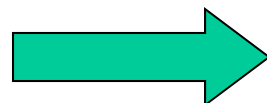


相互接続が影響しないように高 Z_{in} と低 Z_{out}

高周波設計



最大電力伝送の為に $R_L = R_S$



インピーダンス整合

接続する機器の入出カインピーダンスは

高周波伝送では $Z_0=50\ \Omega$

AV機器等では $Z_0=75\ \Omega$

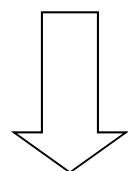
- 充填する誘電体によって周波数特性が大きく変化
- 同じ材質なら太い方が低損失、大電力伝送可能
- 太いと利用できる最高周波数が低下

$$f_{\max} = \frac{c}{\pi \sqrt{\epsilon_r} \frac{a+b}{2}}$$

規格化振幅

$$a(x) = \frac{e_+ \exp(-j\beta x)}{\sqrt{2R_0}} = \frac{[e(x) + R_0 i(x)]}{2\sqrt{2R_0}}$$

$$b(x) = \frac{e_- \exp(+j\beta x)}{\sqrt{2R_0}} = \frac{[e(x) - R_0 i(x)]}{2\sqrt{2R_0}}$$

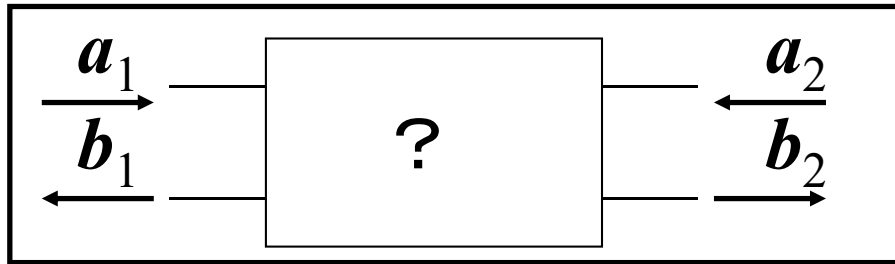


電信方程式に代入

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a(x)}{\partial x} &= -j\beta a(x) \\ \frac{\partial b(x)}{\partial x} &= +j\beta b(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{直交モード方程式} \\ (a \text{ と } b \text{ は独立に伝搬する}) \end{array}$$

単位長当たりの変化率が純
虚数の場合、波動の伝搬

散乱係数



$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

a_m : 入射波の規格化振幅

線形可逆受動回路では $S_{ji} = S_{ij}$

b_m : 反射波の規格化振幅

規格化振幅 : $|a_m|^2$ が電力に相当、位相は同一

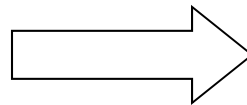
単位: dBm (mW)

S_{21} : 透過係数

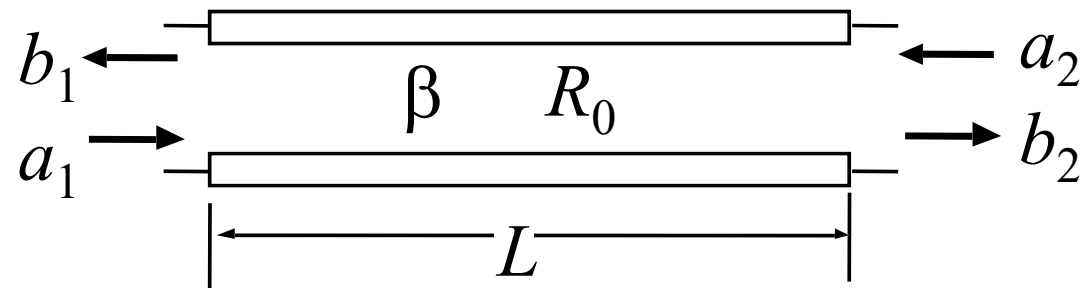
挿入損失: $-20\log_{10}|S_{21}|$

S_{11} : 反射係数

反射損失: $-20\log_{10}|S_{11}|$



無損失伝送線路の散乱行列表示



$$b_1 = a_2 \exp(-j\beta L)$$

$$b_2 = a_1 \exp(-j\beta L)$$

➡
$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \exp(-j\beta L) \\ \exp(-j\beta L) & 0 \end{pmatrix}$$

無損失(Unitary)条件

$$\sum_m |b_m|^2 = \sum_m |a_m|^2$$

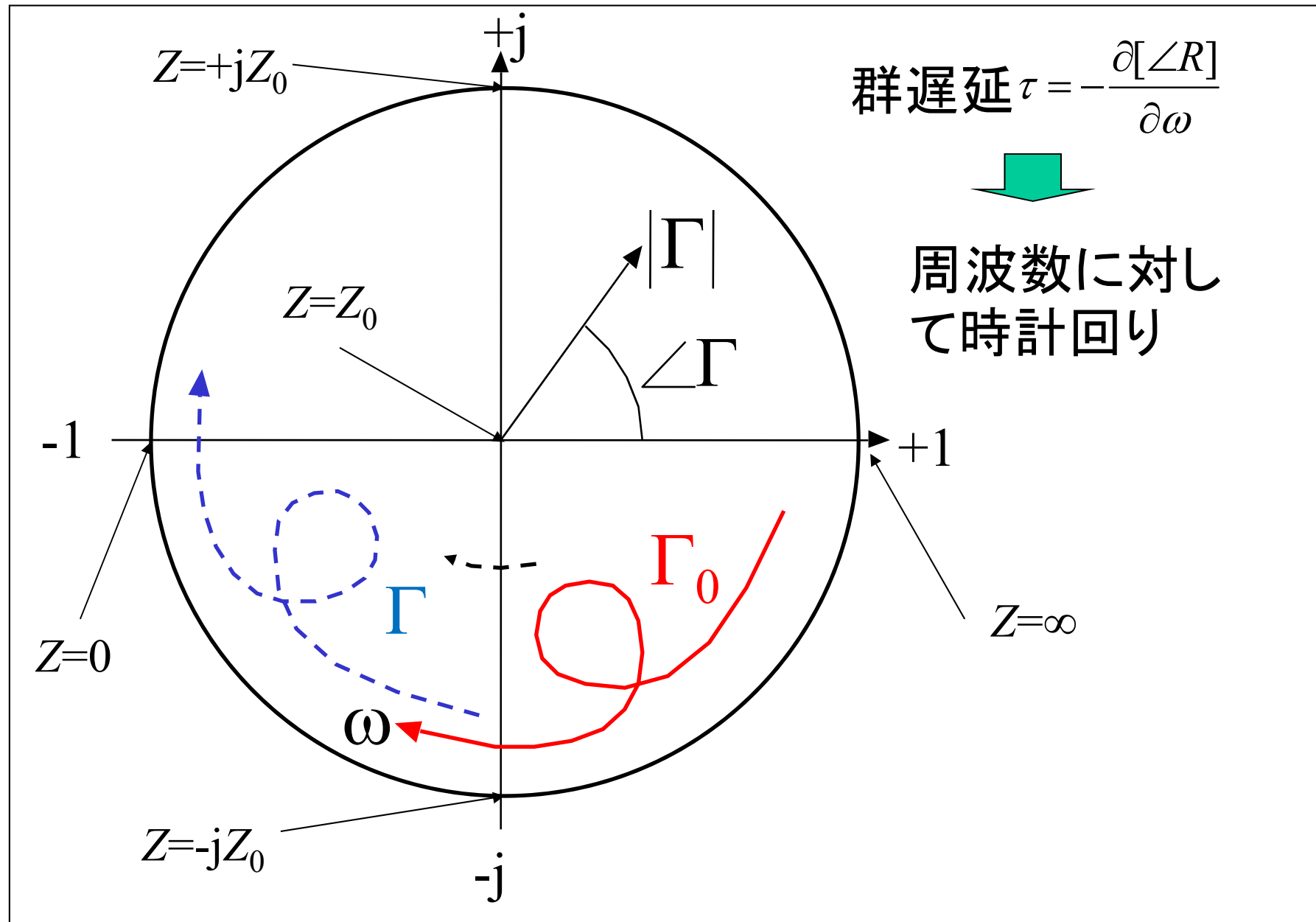
$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \\ S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* = 0 \end{cases}$$

ユニタリ行列: $S^{-1} = S^{t*}$ (固有値の絶対値が全て1)

$\left. \begin{array}{l} 1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2 \\ 1 - |S_{22}|^2 - |S_{12}|^2 \end{array} \right\}$ 入射エネルギーと
散逸エネルギー
の比

周波数による Γ の変化



平行平板電極($w \gg h$ の時)



静電界、静磁界では

$$L = \frac{\mu h}{w}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$V_+ = E h \exp(-j\beta_z z)$$

$$C = \frac{\epsilon w}{h}$$

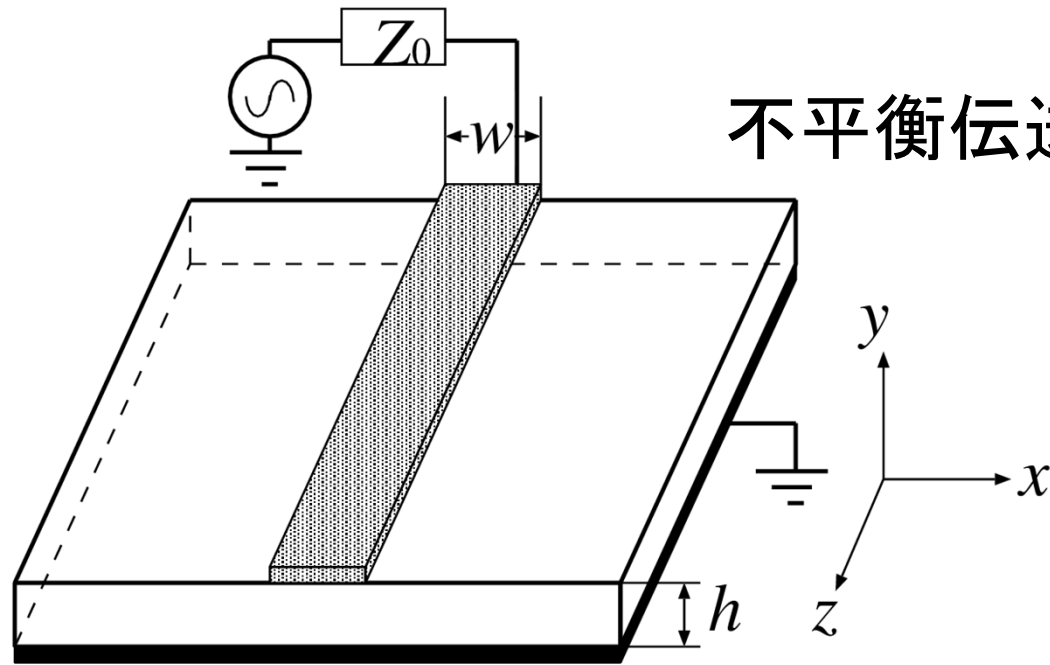
$$Z_0 = \sqrt{\mu / \epsilon} (h / w)$$

$$I_+ = H w \exp(-j\beta_z z)$$

$$-\frac{\partial e}{\partial z} = L \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = C \frac{\partial e}{\partial t}$$

マイクロストリップ線路(プリント基板で実現)



不平衡伝送

$$-\frac{\partial e}{\partial z} = L \frac{\partial i}{\partial t}$$

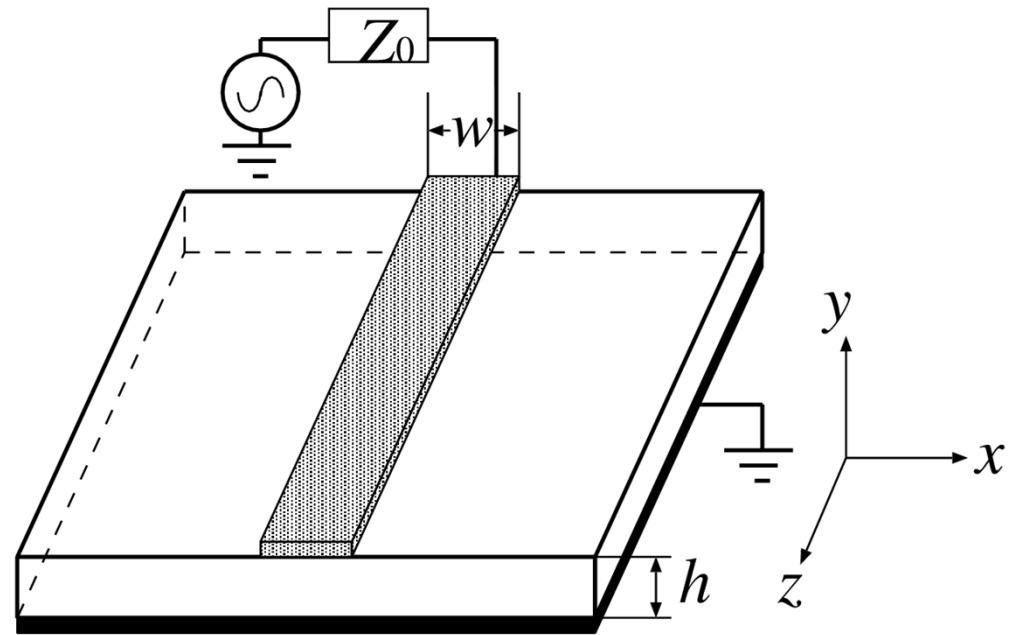
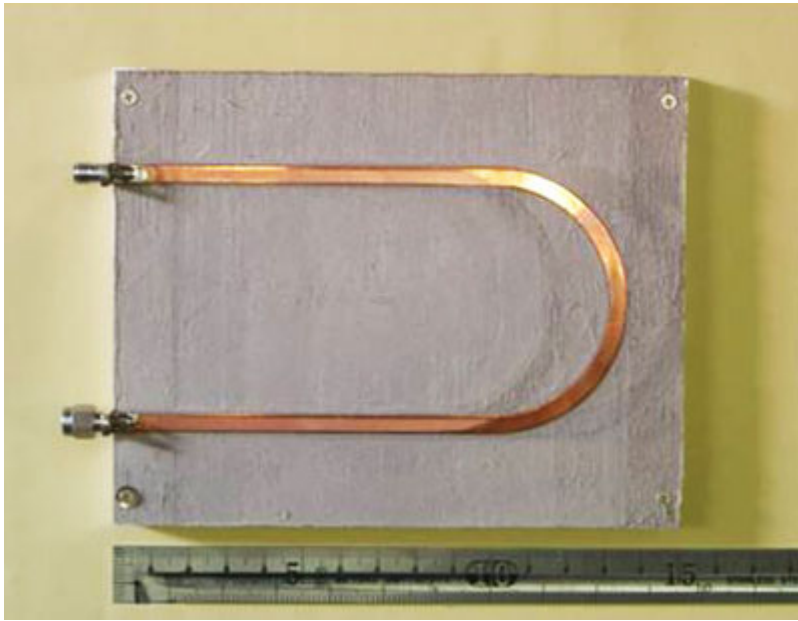
$$-\frac{\partial i}{\partial z} = C \frac{\partial e}{\partial t}$$

$$LC\omega^2 = \beta^2 \text{ は一定}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

主として電極と基板間の場で伝送

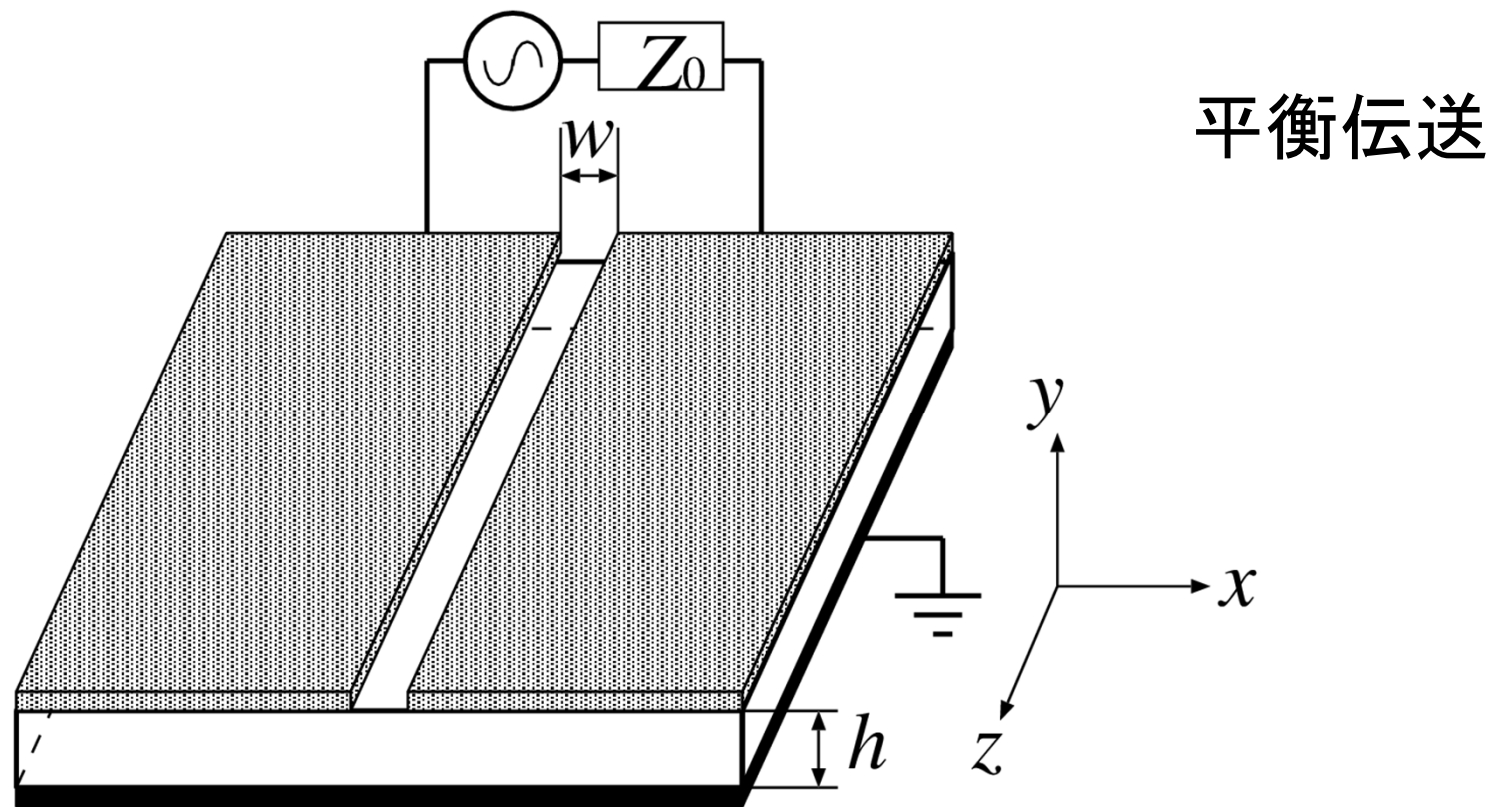
マイクロストリップ線路(プリント基板で実現)



<http://www.elec.ryukoku.ac.jp/about/high-sc/page06.html>

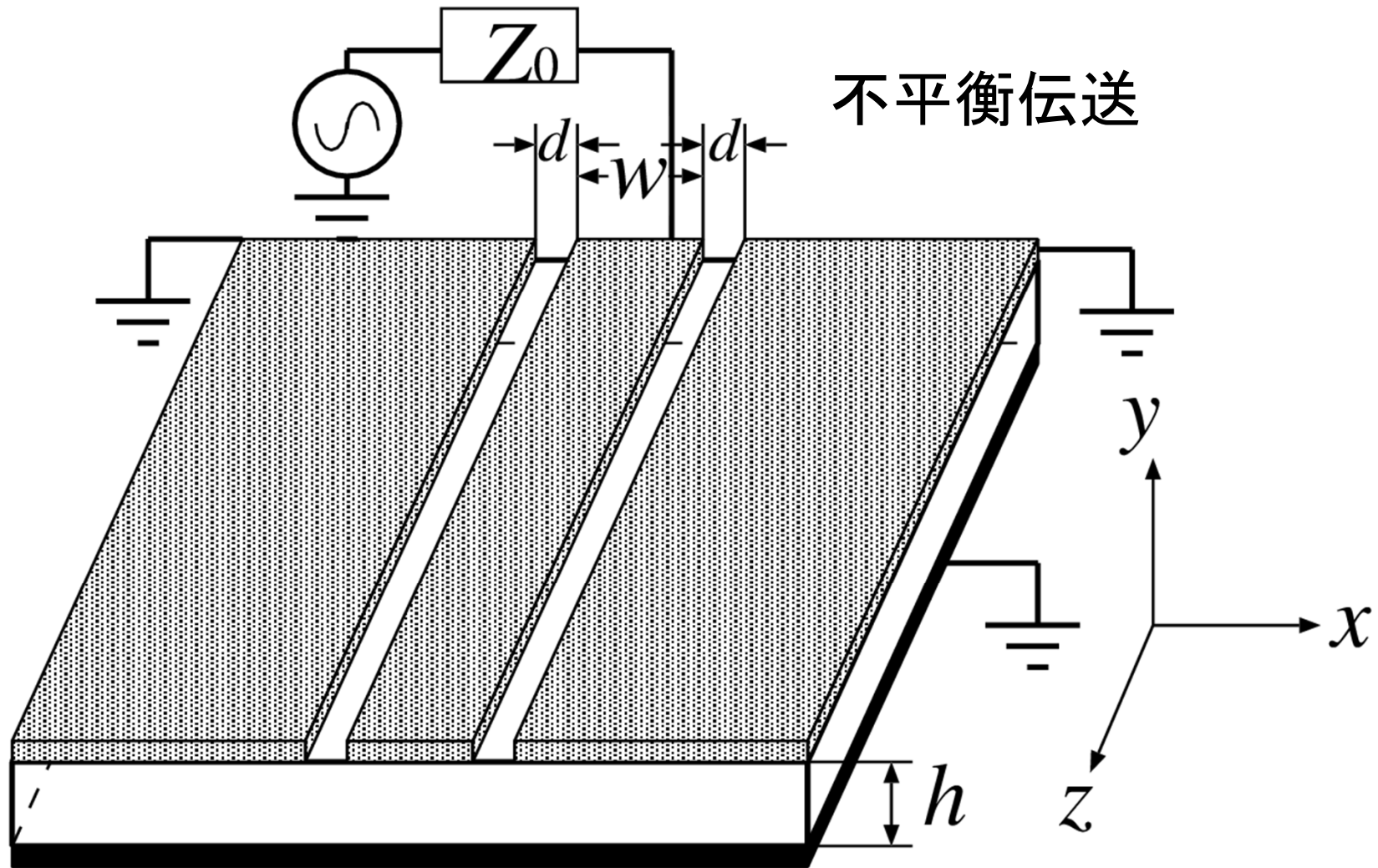
w が狭い時: w や電極厚により補正が必要

スロット線路(プリント基板で実現)



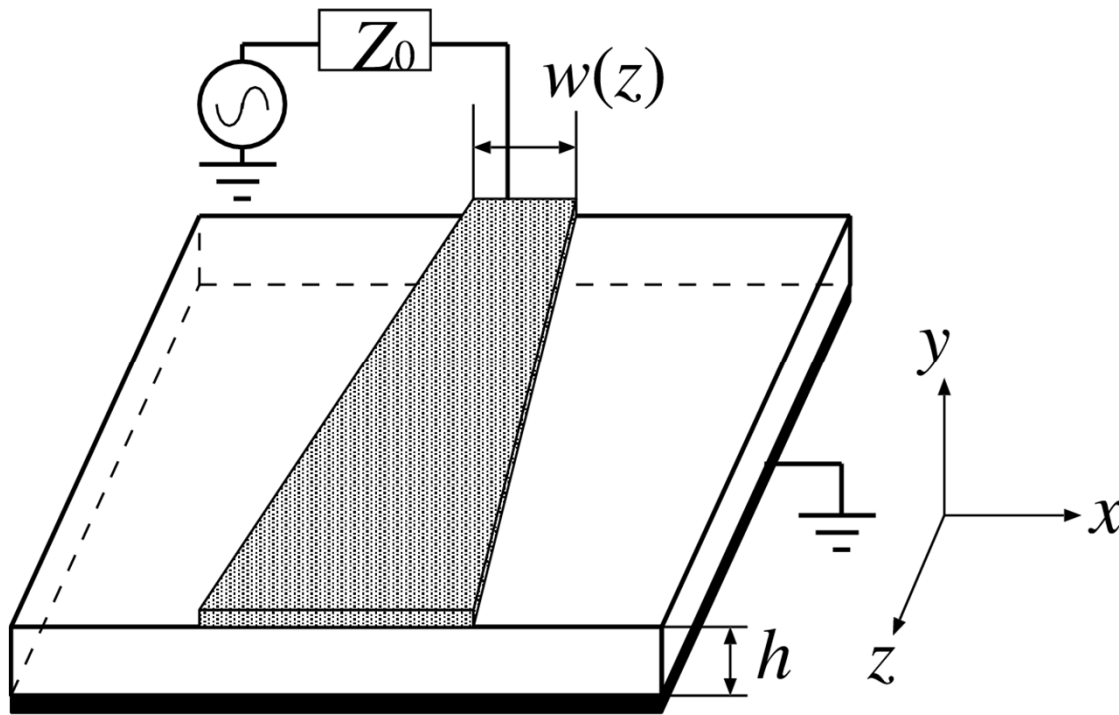
主として電極間の場で伝送

コプレーナ線路 (プリント基板で実現)



主として電極間の場で伝送

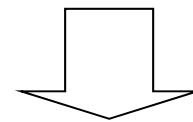
w を x によって変えれば



$$-\frac{\partial e}{\partial z} = L(z) \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = C(z) \frac{\partial e}{\partial t}$$

ただし、 $\omega^2 L(z) C(z) = \beta^2$
は一定と仮定



$$\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + L(z) \frac{\partial L(z)^{-1}}{\partial z} \frac{\partial e}{\partial z} + \underbrace{\omega^2 L(z) C(z)}_{\beta^2} e = 0$$

$L(x)=L_0z^{-2}$, $C(x)=C_0z^2$ の時

$$\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + 2z^{-1} \frac{\partial e}{\partial z} + \beta^2 e = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 (ze)}{\partial z^2} + \beta^2 (ze) = 0$$

一般解

$$e = z^{-1} [c_+ \exp(-j\beta z) + c_- \exp(+j\beta z)]$$

$$i = \frac{z^{-1}}{\omega L} [(\beta - jz^{-1})c_+ \exp(-j\beta z) - (\beta + jz^{-1})c_- \exp(+j\beta z)]$$

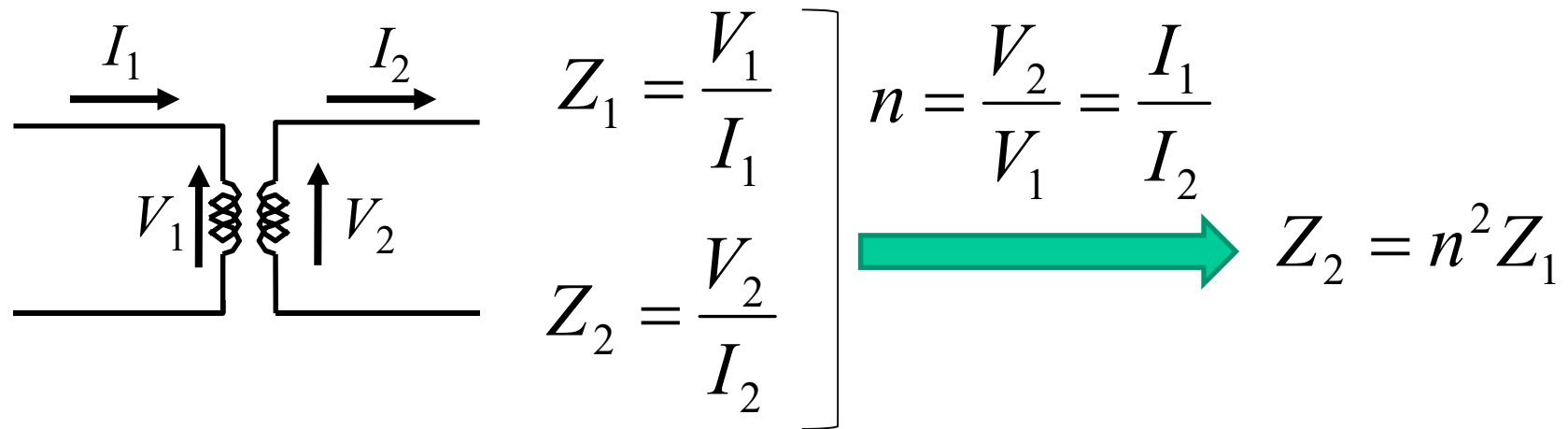
$|\beta| \gg |x|^{-1}$ であれば(曲がりが緩やかであれば)

$$e \sim z^{-1} [c_+ \exp(-j\beta z) + c_- \exp(+j\beta z)]$$

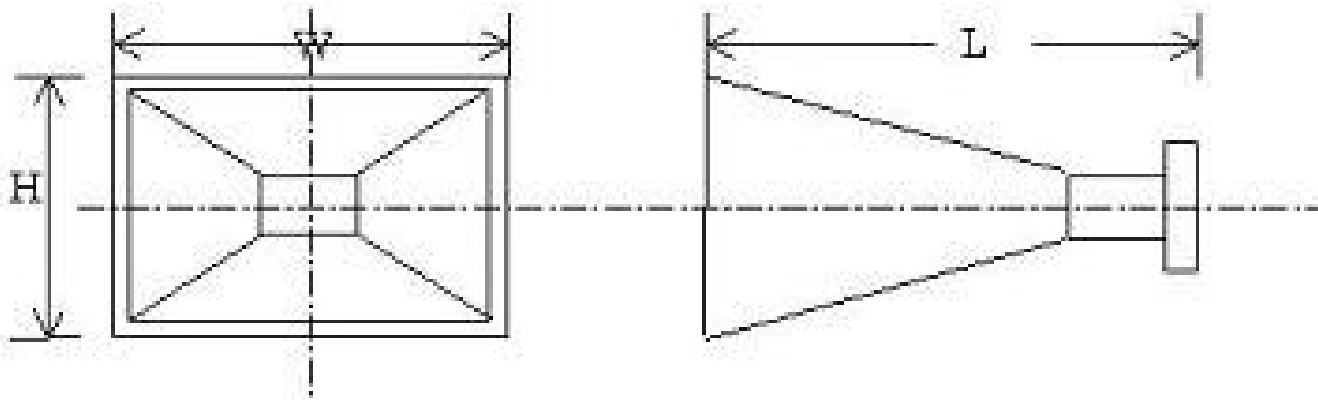
$$i \sim Z(z)^{-1} z^{-1} [c_+ \exp(-j\beta z) - c_- \exp(+j\beta z)]$$

ここで $Z(z) = \sqrt{L(z)/C(z)} = \sqrt{L_0/C_0} z^{-2}$

インピーダンス変換は理想トランスと等価



ストレートホーン



ストレートホーンの例



メガホン

$L(z)=L_0\exp(-2\alpha z)$, $C(x)=C_0\exp(+2\alpha z)$ の時

$$\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + 2\alpha \frac{\partial e}{\partial z} + \beta^2 e = 0$$

一般解

$$\xi = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

$$e = \exp(-\alpha z) [c_+ \exp(-j\xi z) + c_- \exp(+j\xi z)]$$

$$i = \frac{1}{\omega L} \exp(-\alpha z) [(\xi - ja)c_+ \exp(-j\xi z) - (\xi + ja)c_- \exp(+j\xi z)]$$

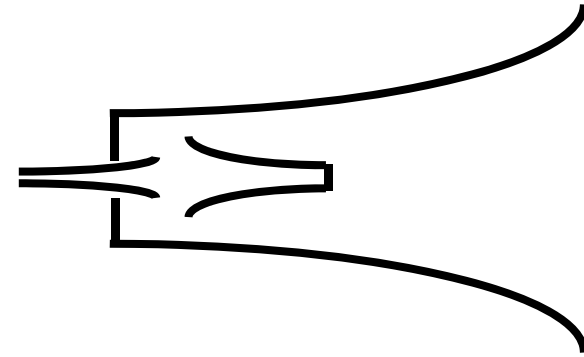
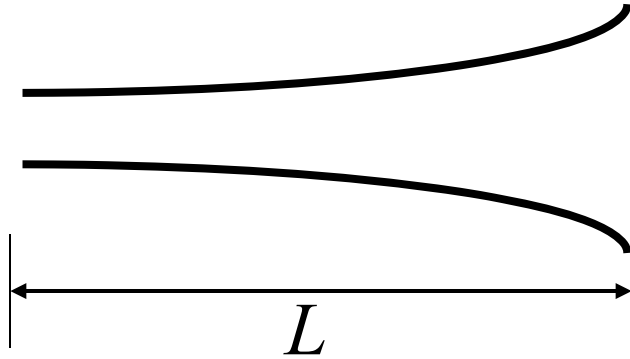
$|\beta| \gg |\alpha|$ であれば(曲がりが緩やかであれば)

$$e \sim \exp(-\alpha z) [c_+ \exp(-j\beta z) + c_- \exp(+j\beta z)]$$

$$i \sim Z(z)^{-1} \exp(-\alpha z) [c_+ \exp(-j\beta z) - c_- \exp(+j\beta z)]$$

ここで $Z(z) = \sqrt{L(z)/C(z)} = \sqrt{L_0/C_0} \exp(-2\alpha z)$

エキスポーネンシャルホーン



ホーンを折り返すと

ホーンスピーカ



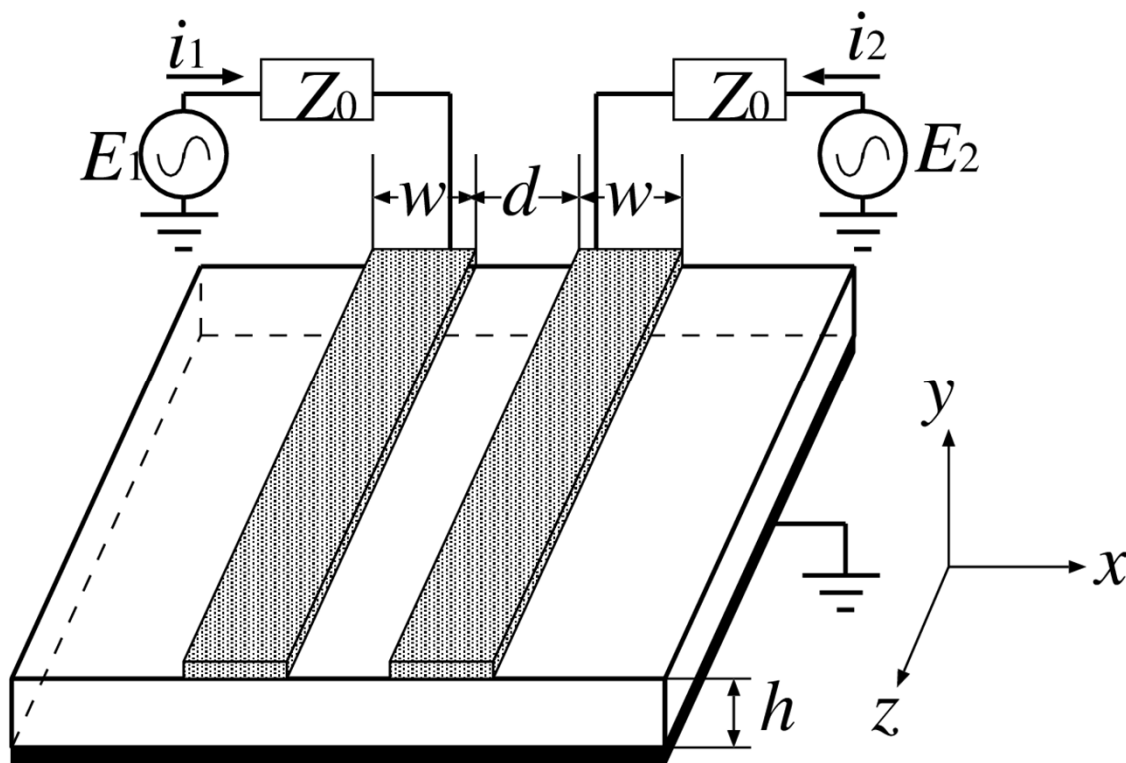
結合マイクロストリップ線路

$$-\frac{\partial e_1}{\partial x} = L \frac{\partial i_1}{\partial t} + M \frac{\partial i_2}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial e_1}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial e_2}{\partial x} = L \frac{\partial i_2}{\partial t} + M \frac{\partial i_1}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i_2}{\partial x} = C \frac{\partial e_2}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} = -CL\omega^2 e_1 - CM\omega^2 e_2$$

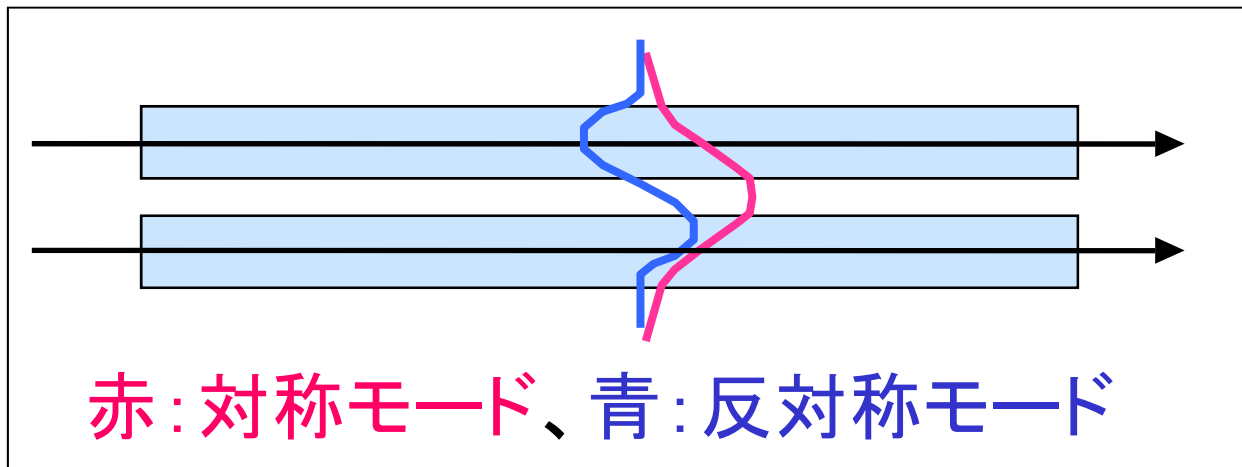
$$\frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} = -CM\omega^2 e_1 - CL\omega^2 e_2$$

$$\frac{\partial^2(e_1 + e_2)}{\partial x^2} = -\omega^2 C(L + M)(e_1 + e_2)$$

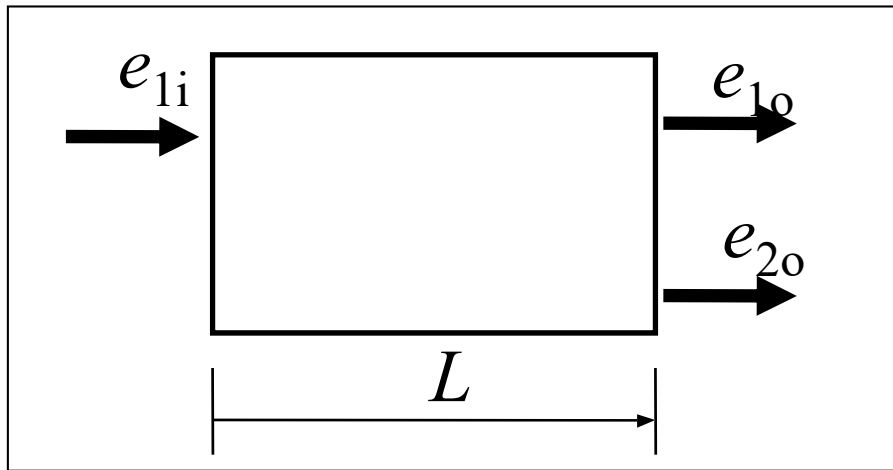
$$\frac{\partial^2(e_1 - e_2)}{\partial x^2} = -\omega^2 C(L - M)(e_1 - e_2) \quad -\frac{\partial(i_1 \pm i_2)}{\partial x} = j\omega C(e_1 \pm e_2)$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = c_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-j\beta_+ x) + c_- \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(-j\beta_- x)$$

$$\beta_{\pm} = \omega \sqrt{C(L \pm M)}$$



境界条件の適用



$$x=0 \text{ で } e_1 = e_{1i}, e_2 = 0 \Rightarrow \\ c_+ = c_- = 0.5e_{1i}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = e_{1i} \exp(-j\beta_0 x) \begin{pmatrix} \cos(\kappa x) \\ -j \sin(\kappa x) \end{pmatrix}$$

$$\text{ここで } \beta_0 = (\beta_+ + \beta_-)/2 \\ \kappa = (\beta_+ - \beta_-)/2$$

