令和2年9月25日版

伝送工学

Part 5:自由空間での電波伝搬

千葉大学工学部
総合工学科電気電子工学コース
橋本研也
k.hashimoto@ieee.org
http://www.te.chiba-u.jp/lab/ken

マクスウェルの方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Z伝搬平面波の場合 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ であるから

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t} \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial D_y}{\partial t}$$

真空中では

$$D_x = \varepsilon_0 E_x,\ D_y = \varepsilon_0 E_y$$

$$B_x = \mu_0 H_x,\ B_y = \varepsilon_0 \mu_0 H_y$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \qquad -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

波動方程式

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

一般解

$$E_x(z,t) = \boxed{f_+(t - z/v)} + \boxed{f_-(t + z/v)}$$

+z方向への進行波　　-z方向への進行波

ここで　$v = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$　:電磁波の速度

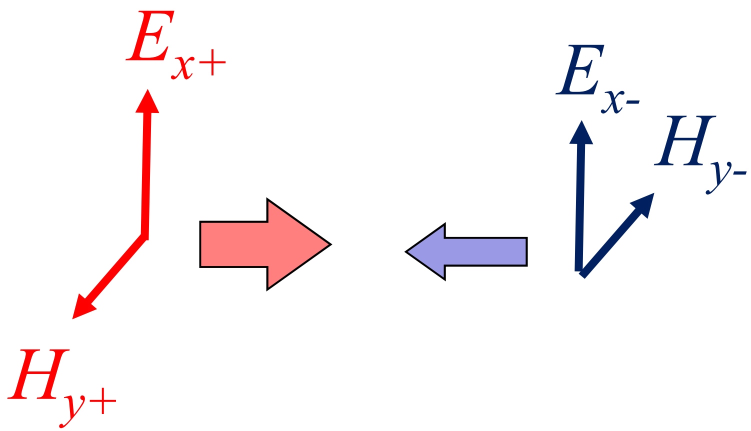
$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$ に代入すると

$$H_y(z,t) = z_0^{-1}\left[f_+(t - z/v) - f_-(t + z/v)\right]$$

ここで　$z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$　:電磁波の特性インピーダンス

特性インピーダンスz_0

$$E_{x\pm} = \pm z_0 H_{y\pm}$$



E_{x+}:+z方向への進行波の電界

E_{x-}:-z方向への進行波の電界

$$E_x(z,t) = E_{x+}(t - z/v) + E_{x-}(t + z/v)$$

$$H_y(z,t) = H_{y+}(t - z/v) - H_{y-}(t + z/v)$$
$$= z_0^{-1}\left[E_{x+}(t - z/v) - E_{x-}(t + z/v)\right]$$

ポインチング定理

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$ **H** との内積を取ると

$$\Rightarrow \quad \mathbf{H} \bullet \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{H} \bullet \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{B} \bullet \mathbf{H}\right) \qquad ①$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$ **E** との内積を取ると

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E} \bullet \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \bullet \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{D} \bullet \mathbf{E}\right) \qquad ②$$

①-②より

$$\underline{\mathbf{H} \bullet \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \bullet \nabla \times \mathbf{H}} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathrm{D} \bullet \mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{B} \bullet \mathbf{H}\right) \qquad ③$$

$\Downarrow$ ベクトル恒等式

$$\nabla \bullet (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

$$\nabla \bullet (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathrm{D} \bullet \mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{B} \bullet \mathbf{H}\right)$$

ガウスの定理

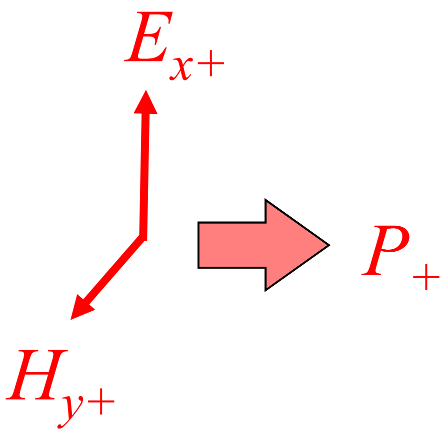
$$\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \bullet d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\mathrm{D} \bullet \mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{B} \bullet \mathbf{H}\right) dV$$

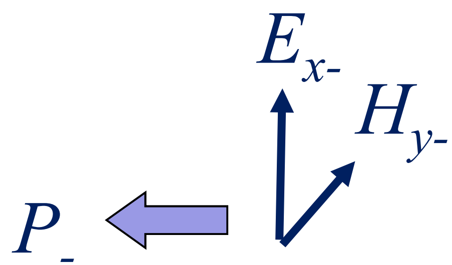
表面から流れ出た波動のパワー（エネルギー保存則より）

蓄積エネルギーの単位時間あたりの減少分

ポインチングベクトル

$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$　波動が運ぶ単位面積当たりのパワー





$$E_x(z,t) = E_{x+}(t - z/v) + E_{x-}(t + z/v)$$

$$H_y(z,t) = z_0^{-1}\left[E_{x+}(t - z/v) - E_{x-}(t + z/v)\right]$$

$$\Rightarrow \quad P_z(z,t) = E_x(z,t) H_y(z,t)$$

$$= \underbrace{z_0^{-1} E_{x+}(t - z/v)^2}_{\text{$+x$方向に進む波動のパワー流密度 (P_+)}} - \underbrace{z_0^{-1} E_{x-}(t + z/v)^2}_{\text{$-x$方向に進む波動のパワー流密度 (P_-)}}$$

複素数表現 $\exp[-j\beta_z z + j\omega t]$

ω: 角周波数(=2π/T: 単位時間当たりの位相進み)

β_z: 波数(=2π/λ: 単位距離当たりの位相遅れ)

Z伝搬平面波の場合

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad -j\beta_z E_x = -j\omega B_y$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad j\beta_z H_y = j\omega D_x$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad j\beta_z E_y = -j\omega B_x$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial D_y}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad -j\beta_z H_x = j\omega D_y$$

$$\beta_z = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$$

複素ポインチング定理

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{E}}^*\right)$$

とおけば

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{H}}^*\right)$$

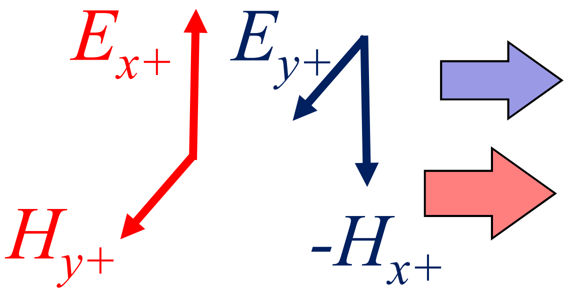
$$\Rightarrow \quad \mathbf{P} = \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{E}}^*\right)\times\left(\hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{H}}^*\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}\right)$$

時間平均パワー　　停留しているパワー

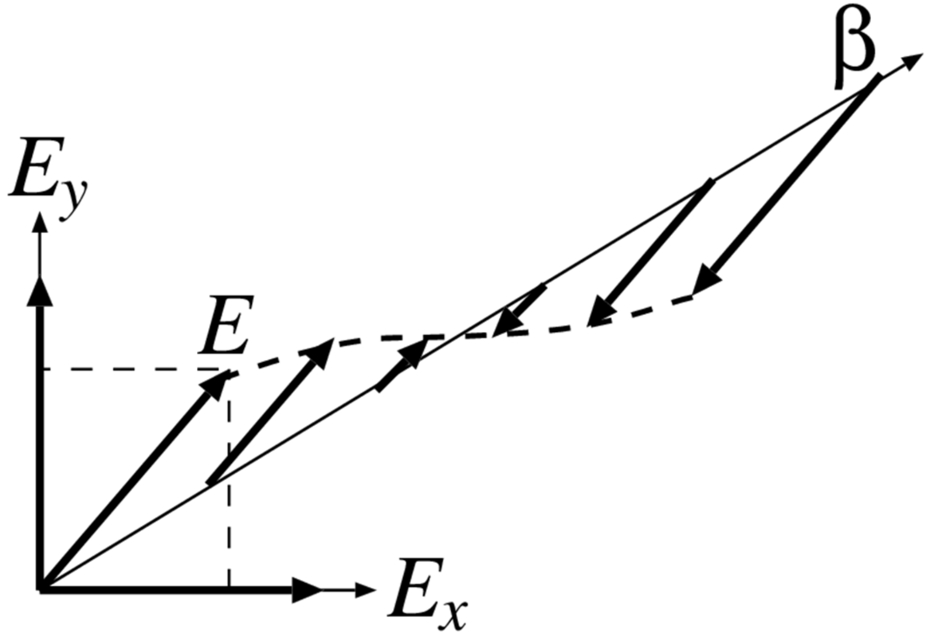
$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*$$ 複素ポインチングベクトル

偏波・偏光(2成分への分解：独立に伝搬)



$$\mathbf{E}_+ = \begin{pmatrix} E_{x+} \\ E_{y+} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H}_+ = Z_0 \begin{pmatrix} -E_{y+} \\ E_{x+} \\ 0 \end{pmatrix}$$

E_{x+}とE_{y+}が同一周波数で同相の場合

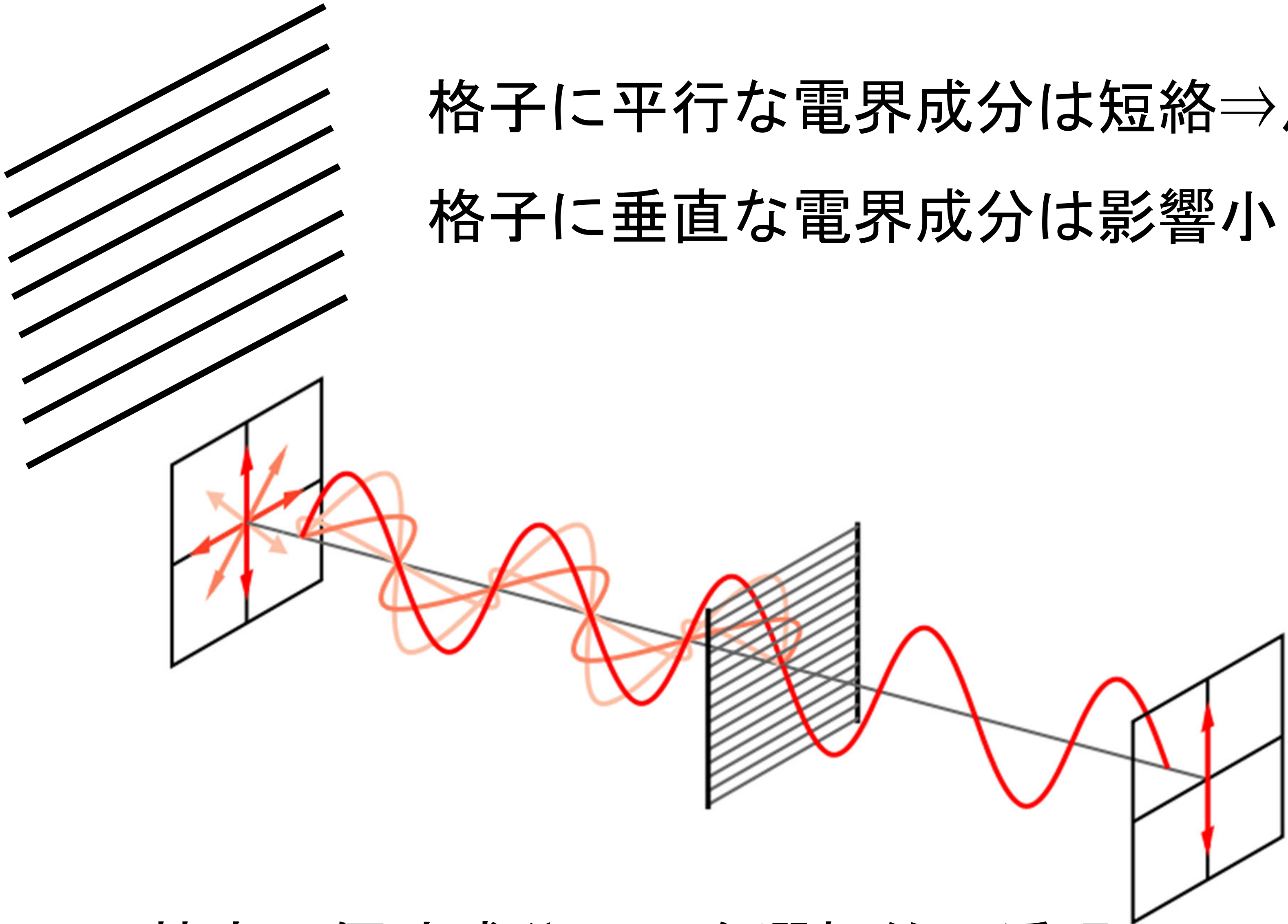


直線偏波

波長よりも十分狭い間隔の金属格子

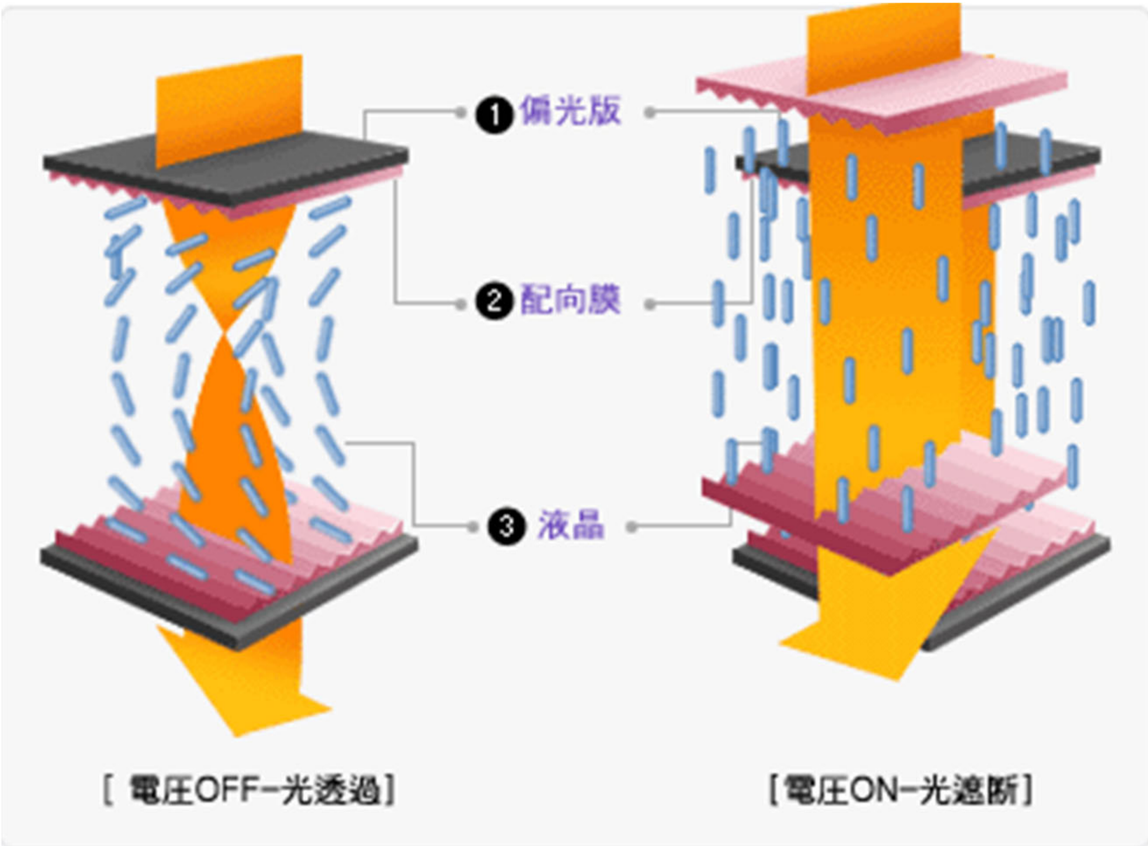
格子に平行な電界成分は短絡⇒反射

格子に垂直な電界成分は影響小



特定の偏波成分のみを選択的に透過

液晶ディスプレイの原理図



電界によって分子配列が変化

偏波面の回転量が変化

偏波板により振幅変化へ

http://www.e-litecom.com/webapp/jap/research/lcm.jsp

$$\mathbf{E}_1 = a_1(t)\begin{pmatrix}1\\ c\\ 0\end{pmatrix}$$ と $$\mathbf{E}_2 = a_2(t)\begin{pmatrix}-c^*\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$ は常に直交

⇒ a_1とa_2により独立に情報伝送可能

注：複素数の場合の直交は　$\mathbf{E}_1 \bullet \mathbf{E}_2^* = 0$

$$\left|\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\right|^2 = \left|\mathbf{E}_1\right|^2 + \left|\mathbf{E}_2\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_1 \bullet \mathbf{E}_2^*\right)$$

例　右円偏波と左円偏波

$$\mathbf{E}_1 = a_1(t)\begin{pmatrix}1\\ j\\ 0\end{pmatrix}$$ と $$\mathbf{E}_2 = a_2(t)\begin{pmatrix}j\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

導電性があると

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\boxed{+\mathbf{J}}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$$

$$\mathbf{J}=\underline{\kappa}\mathbf{E}$$

導電率

とすれば

$$\nabla\times\mathbf{E}=-j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\left(j\omega\varepsilon+\kappa\right)\mathbf{E}$$

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1-j\kappa/\omega\varepsilon\right)}\sim\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1-j\kappa/2\omega\varepsilon\right)$$

$\beta=\beta_r+j\beta_i$と表現すれば

$$\exp(j\beta x)=\underline{\exp(-j\beta_r x)}\,\underline{\exp(\beta_i x)}$$

$+x$伝搬による位相回転

$+x$伝搬による減衰($\beta_i<0$の時)

異方性がある場合

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$$

ε, μは2階のテンソル(3行3列の行列)

例 : $D_i = \varepsilon_{ii} E_i \quad B_i = \mu_{ii} H_i$ の場合、z伝搬波動の解

$$\beta H_y = \omega\varepsilon_{11} E_x$$
$$\beta E_x = \omega\mu_{22} H_y$$

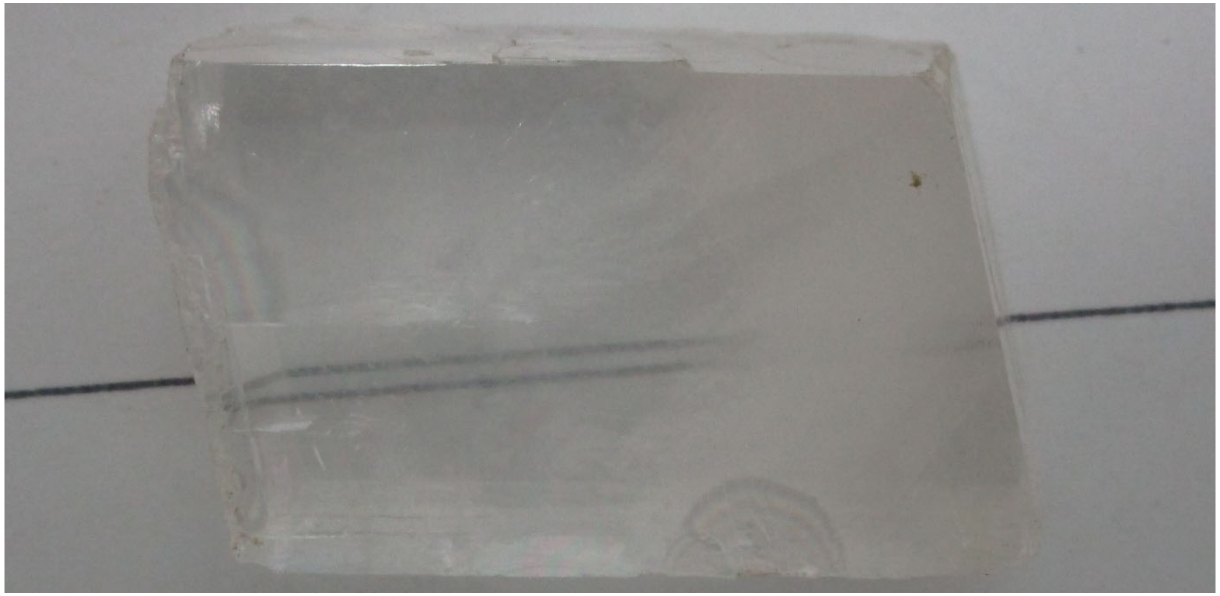
$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_{11}\mu_{22}}$$
$$z_0 = H_y / E_x = \sqrt{\mu_{22} / \varepsilon_{11}}$$

$$\beta H_x = -\omega\varepsilon_{22} E_y$$
$$\beta E_y = -\omega\mu_{11} H_x$$

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_{22}\mu_{11}}$$
$$z_0 = -H_x / E_y = \sqrt{\mu_{11} / \varepsilon_{22}}$$

偏波により波動の速度、インピーダンスに違い　＝　複屈折

複屈折を持つ材料を光が透過すると

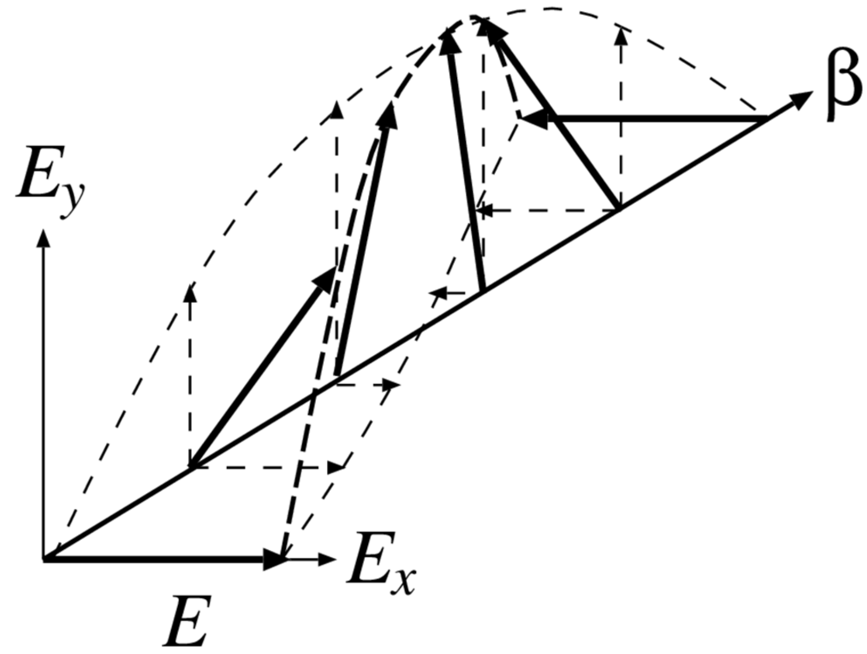


方解石を透かして見た直線

複屈折がある媒体の伝搬 ⇒ E_{x+}とE_{y+}に位相差

E_{x+}とE_{y+}が同一周波数で位相がずれている場合

楕円偏波



E_{x+}とE_{y+}が同一周波数で位相が90°ずれている場合（½波長板）

円偏波

回転方向は波動の進行方向に対して定義

旋光性(液晶は一例)

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -j\chi & 0 \\ j\chi & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}(\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{ji}^{*})$ は旋光性を表現

$\mathrm{Im}(\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{ji})$は損失を表現

$$-j\beta E_x = -j\omega\mu H_y$$

$$j\beta H_y = j\omega(\varepsilon_{11}E_x - j\chi E_y)$$

$$j\beta E_y = -j\omega\mu H_x$$

$$-j\beta H_x = j\omega(j\chi E_x + \varepsilon_{11}E_y)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}-\beta^2/\omega^2 & -j\chi \\ j\chi & \varepsilon_{11}-\beta^2/\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

非自明な解を持つ条件

$$\beta = \omega\sqrt{\mu(\varepsilon_{11} \pm \chi)} \equiv \beta_{\pm}$$

この時　$E_y = \pm jE_x$

右回り偏波と左回り偏波が異なる速度

x偏向波の入射

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}\exp(-j\beta_+ x) + \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}\exp(-j\beta_- x)$$

$\beta_{\mathrm{avg}} = (\beta_+ + \beta_-)/2$ とおくと

$\Delta = (\beta_+ - \beta_-)/2$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \cos(\Delta x) \\ \sin(\Delta x) \end{pmatrix}\exp(-j\beta_{\mathrm{avg}} x)$$

伝搬に伴う偏波面の回転

可逆：逆に入れると元に戻る

比較:ファラデー効果

非可逆：逆に入れると更に偏波面が回転

遅延ポテンシャル

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

ポテンシャル表現

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

次の条件(ローレンツゲージ)を追加

$$\nabla \bullet \mathbf{A} = -\varepsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

これらが無ければ？

$$\nabla^2 \phi \boxed{- \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}} = -\varepsilon^{-1} \rho$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} \boxed{- \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}} = -\mu \mathbf{J}$$

$\nabla \bullet \mathbf{D} = \rho$も利用

重畳の理 $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$

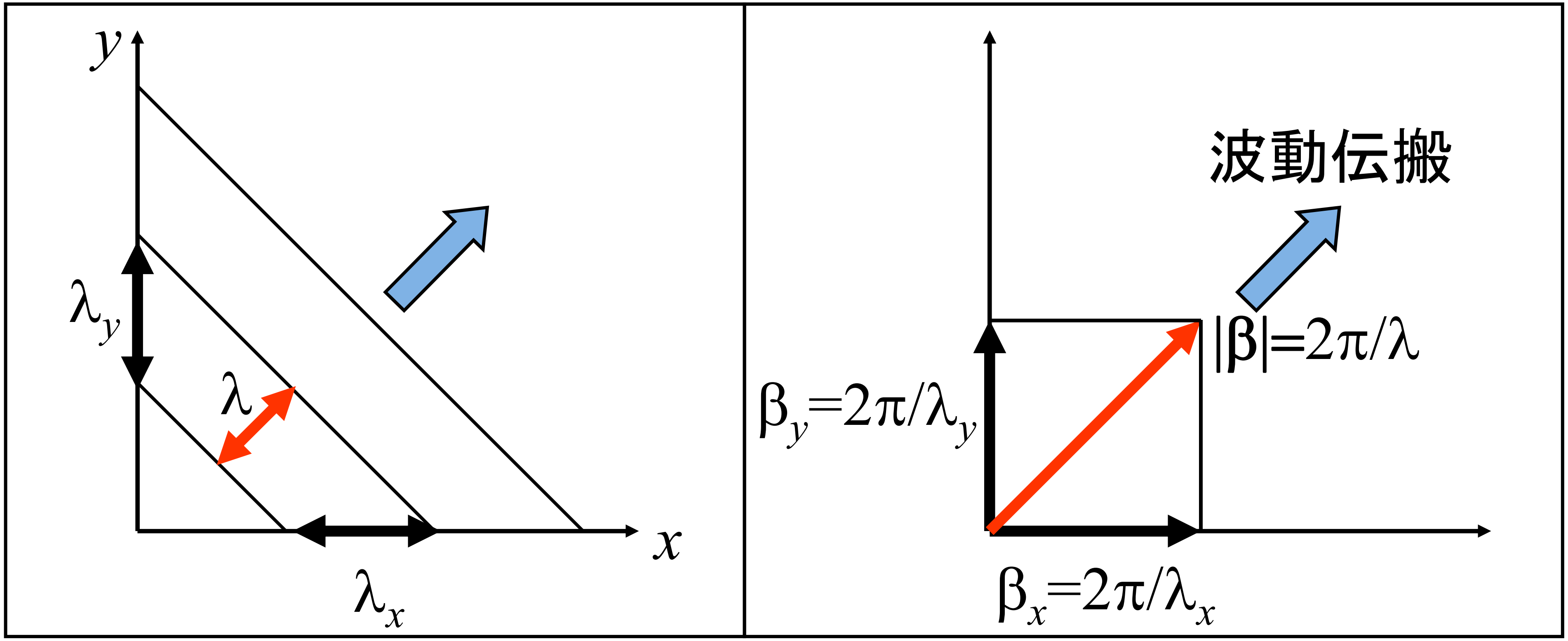
$$\phi(\mathbf{x},t) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}',t')\exp(-j\beta|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{4\pi\varepsilon|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \iiint_V \frac{\mu\mathbf{J}(\mathbf{x}',t')\exp(-j\beta|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}dV'$$

ここで $t' = t - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\sqrt{\varepsilon\mu}$

波数ベクトルβ

ベクトルの指す方向に進む波動の波数



波面の速度 $(=f\lambda)$ はベクトルの分解則に従わない！

$$\exp(-j\boldsymbol{\beta}\bullet\mathbf{X}) \;\Rightarrow\; \exp[-j(\beta_x x+\beta_y y+\beta_z z)]$$

$$\exp(-j\boldsymbol{\beta}\bullet\mathbf{X}) \quad \Rightarrow \quad \nabla \rightarrow -j\boldsymbol{\beta}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow$$

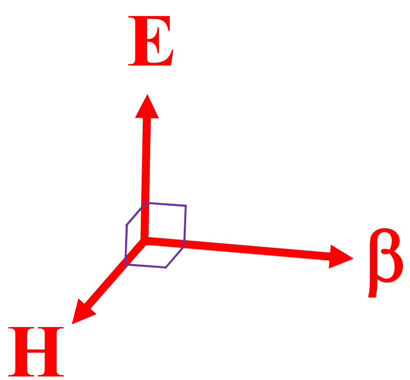
$$-j\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}$$

$$-j\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{H} = j\omega\mathbf{D}$$

$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ の時

$$\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H}$$

$$\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{H} = -\omega\varepsilon\mathbf{E}$$



$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{\beta}||\mathbf{E}| = \omega\mu|\mathbf{H}|, \quad |\boldsymbol{\beta}||\mathbf{H}| = \omega\varepsilon|\mathbf{E}|$$

$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{\beta}| = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

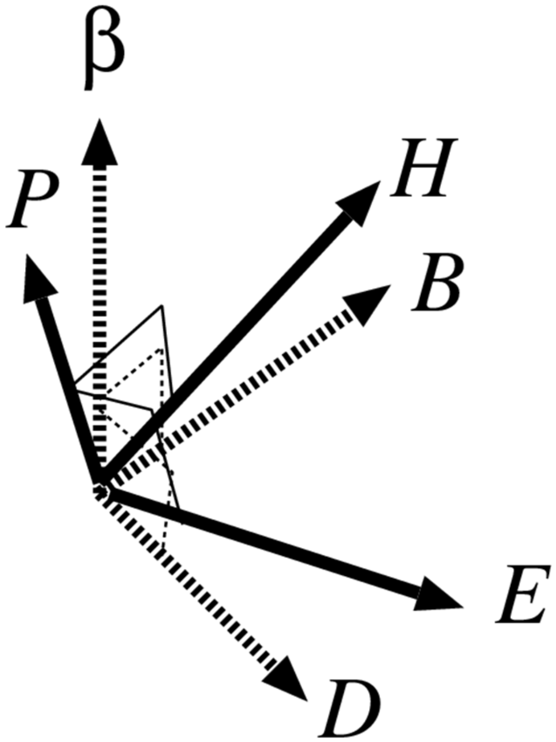
$$R_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$$

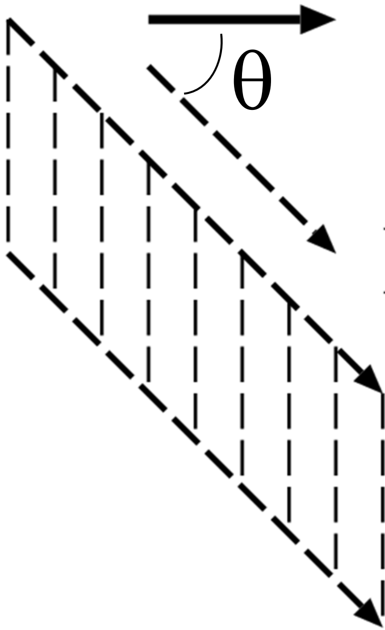
一般の場合

$$\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$$

$$\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}$$

B//**H**、**D**//**E**でなければ
β//**P**とはならない！





β　波面の伝搬方向

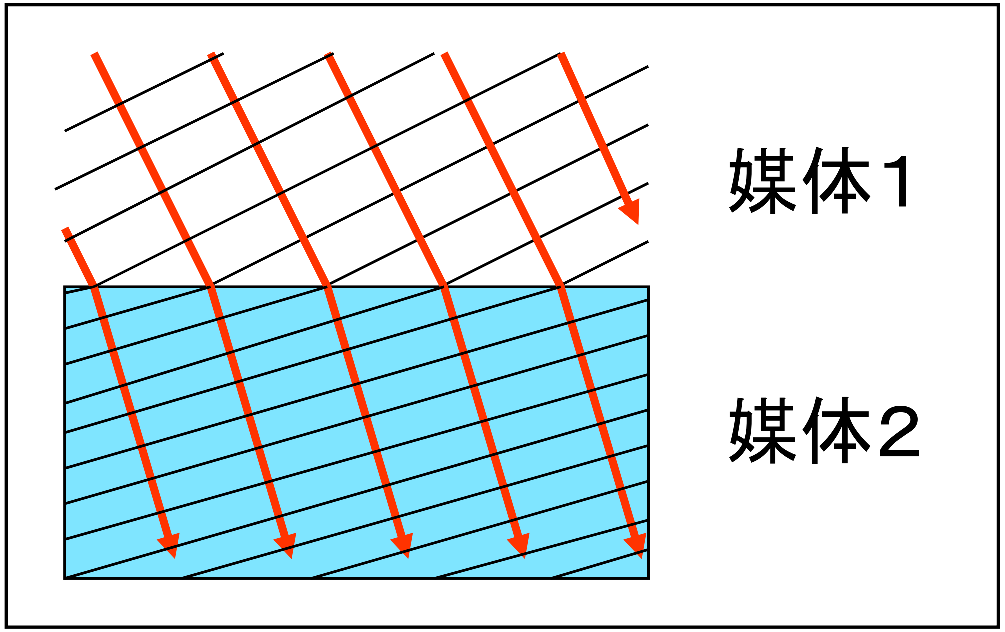
P パワーの伝搬方向

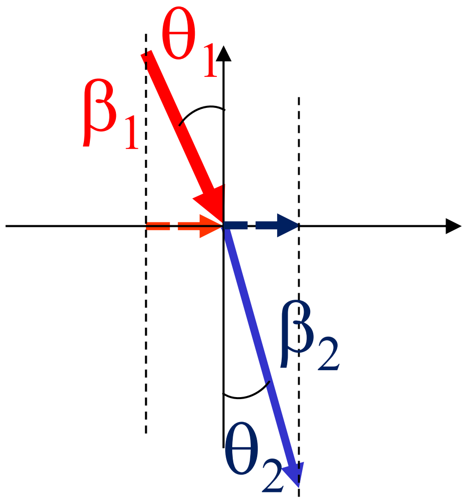
θ:パワーフロー角

スネルの法則

境界面で波面が連続

⇒ 波数ベクトルの境界に平行な成分が連続



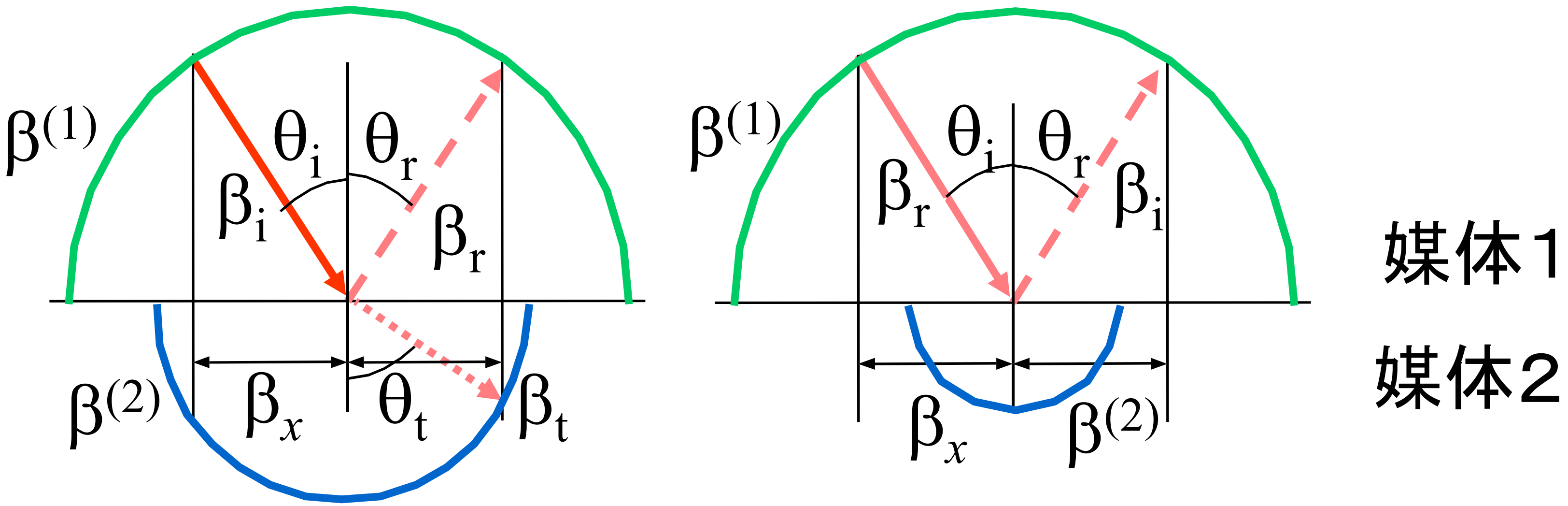


$$\beta_1 \sin\theta_1 = \beta_2 \sin\theta_2$$

$\beta = \omega / v = n\omega / c$ とおけば　$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

n: 屈折率、c: 真空中での光速

図的解法



(a) 反射＋透過　　(b) 全反射

$$\beta^{(1)} \sin\theta_\mathrm{i} = \beta^{(1)} \sin\theta_\mathrm{r} = \beta^{(2)} \sin\theta_\mathrm{t}$$

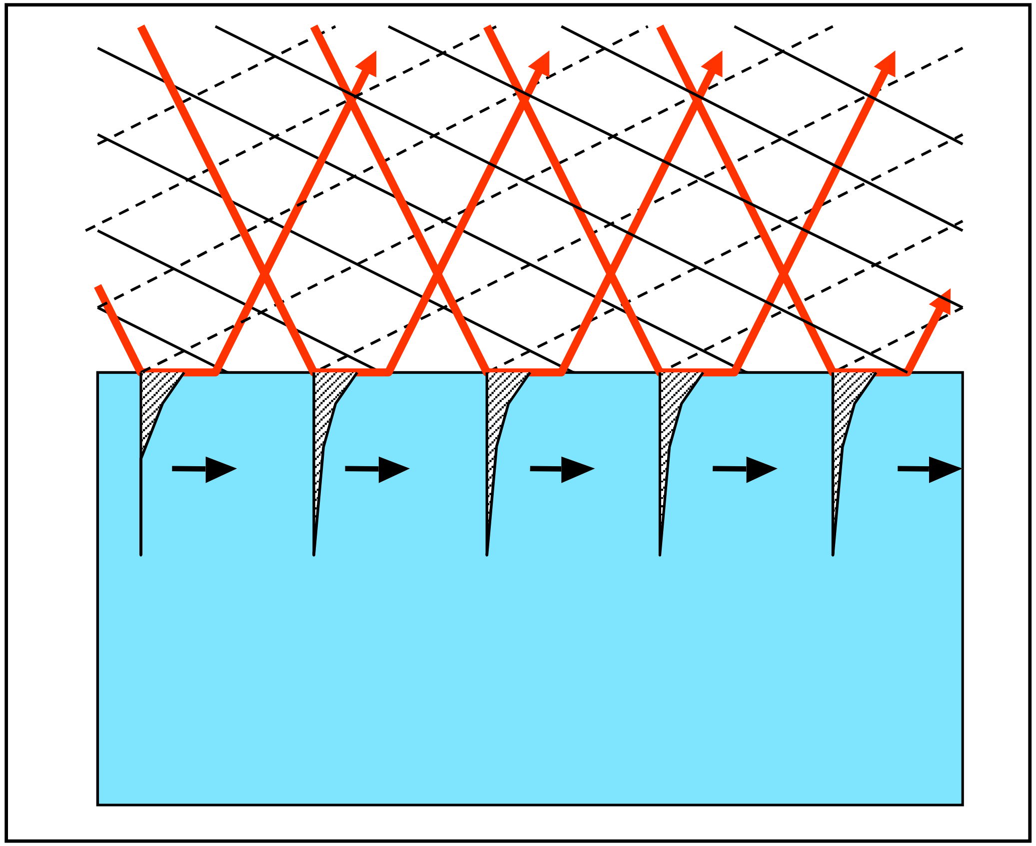
$$\theta_\mathrm{r} = \theta_\mathrm{i}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_\mathrm{t} = \sin^{-1}\left[\frac{\beta^{(1)}}{\beta^{(2)}} \sin\theta_\mathrm{i}\right]$$

媒体が異方性の場合は？

全反射時の媒体2での場（エバネセント）

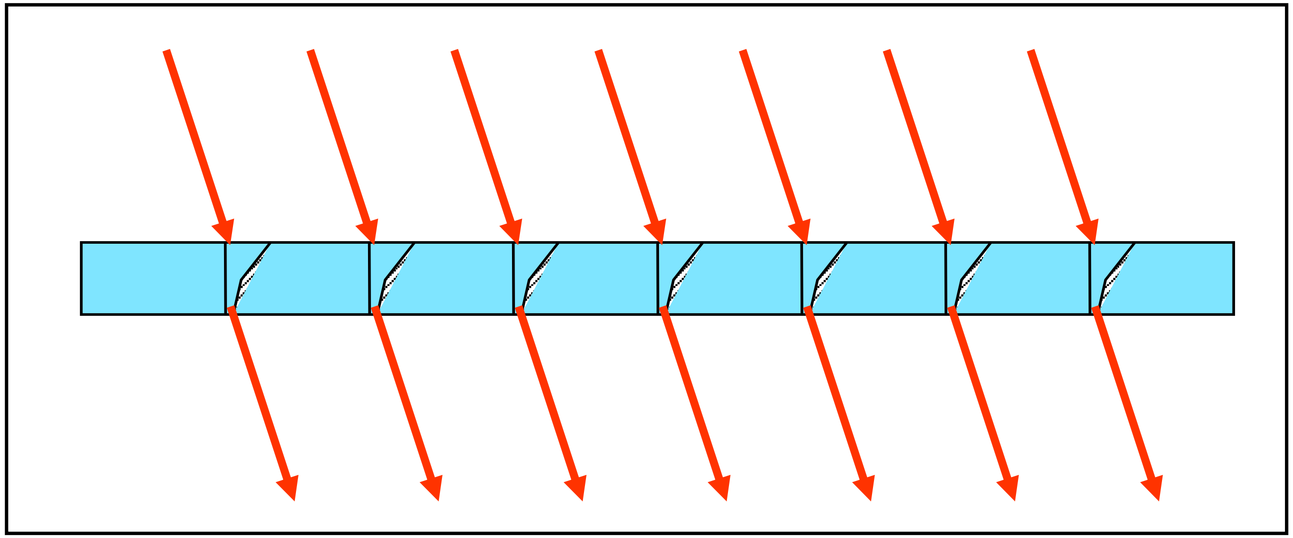
$$\beta_y^{(2)} = -j\sqrt{\beta_x^2 - \beta_0^{(2)2}}$$



媒体2への波動の染み込み

指数関数的減衰（エネルギーの蓄積）

トンネリング



媒体が薄ければ、全反射状態でも波動は透過

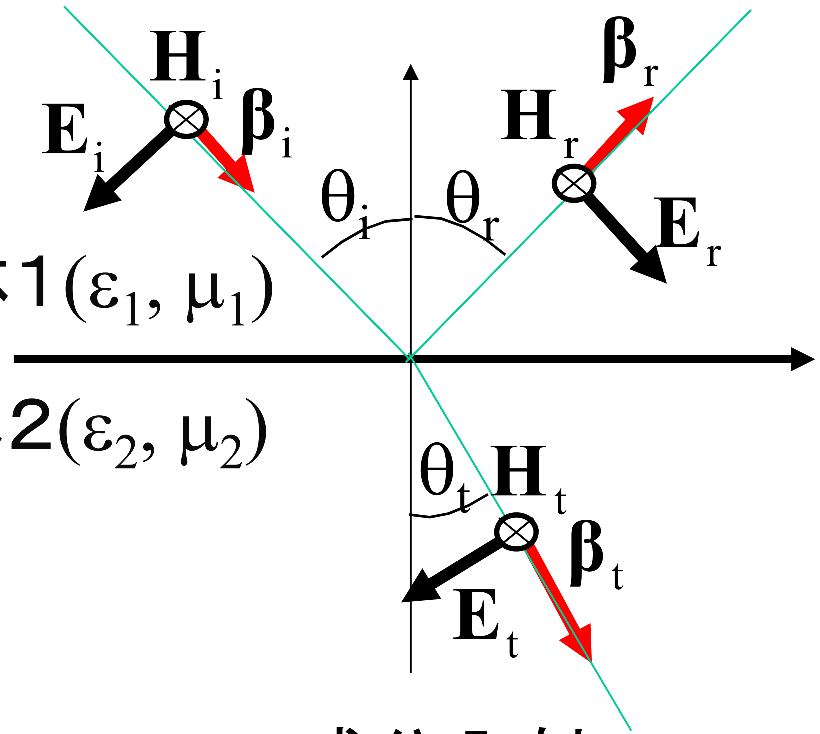
波動の反射率と透過率

スネルの法則より

$$\theta_r = \theta_i$$

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}\sin^2\theta_i}$$

境界条件：$\mathbf{E}_{//}$、$\mathbf{H}_{//}$、$\mathbf{B}_{\perp}$、$\mathbf{D}_{\perp}$が連続



$\mathbf{H}_{//}$成分入射(s偏光)の場合

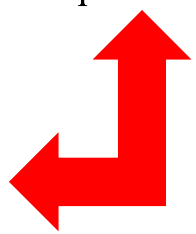
$$H_i + H_r = H_t$$

$$E_i\cos\theta_i - E_r\cos\theta_r = E_t\cos\theta_t$$

$$\varepsilon_1 E_i\sin\theta_i + \varepsilon_1 E_r\sin\theta_r = \varepsilon_2 E_t\sin\theta_t$$

$\mathbf{H}_{//}$成分入射

$$Z_1^{-1}E_i + Z_1^{-1}E_r = Z_2^{-1}E_t$$



同じ式

波動の反射率と透過率

連立方程式を解くと

電界反射係数、透過係数

$$\Gamma_{\mathrm{E}} = \frac{E_{\mathrm{r}}}{E_{\mathrm{i}}} = \frac{z_2 z_1^{-1} - \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}{z_2 z_1^{-1} + \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}$$

$$T_{\mathrm{E}} = \frac{E_{\mathrm{t}}}{E_{\mathrm{i}}} = \frac{2 z_2 z_1^{-1}}{z_2 z_1^{-1} + \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}$$

磁界反射係数、透過係数

$$\Gamma_{\mathrm{H}} = \frac{H_{\mathrm{r}}}{H_{\mathrm{i}}} = \Gamma_{\mathrm{E}}$$

$$T_{\mathrm{E}} = \frac{H_{\mathrm{t}}}{H_{\mathrm{i}}} = z_1 z_2^{-1} T_{\mathrm{E}}$$

ここで、

$$\cos\theta_{\mathrm{t}} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \sin^2\theta_{\mathrm{i}}}$$

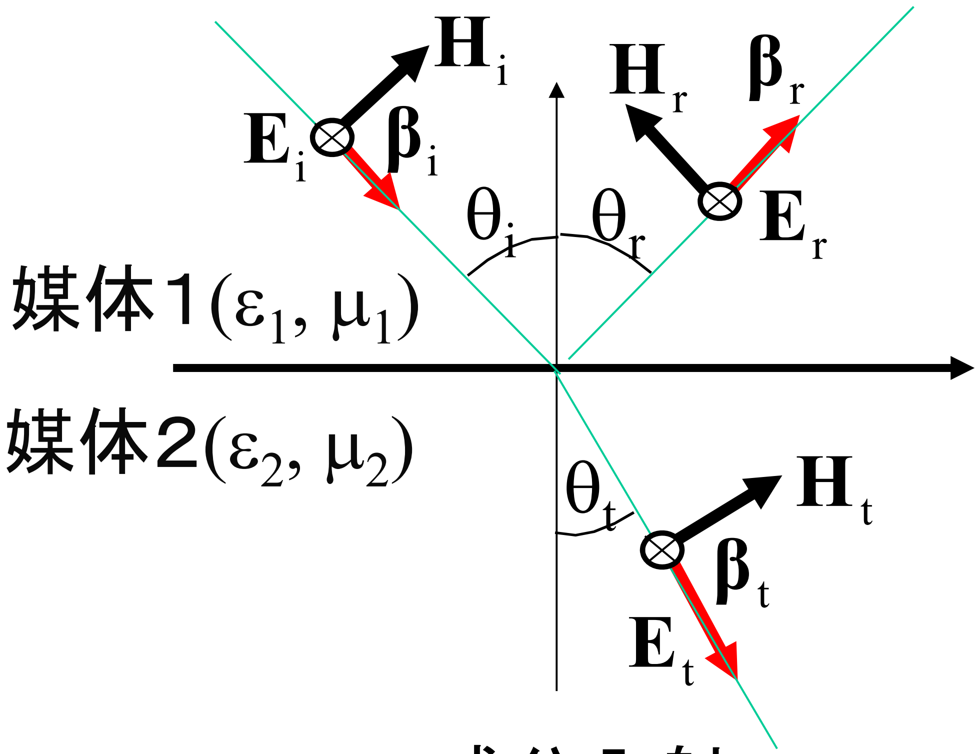
$$z_1 z_2^{-1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2}}$$

パワー保存則

$$\Gamma_{\mathrm{E}} \Gamma_{\mathrm{H}} + \boxed{\frac{\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\cos\theta_{\mathrm{i}}}} T_{\mathrm{E}} T_{\mathrm{H}} = 1$$

鉛直成分のみ！

$\mathbf{E}_{//}$成分入射(p偏光)の場合



$\mathbf{E}_{//}$成分入射

$$E_{\mathrm{i}} + E_{\mathrm{r}} = E_{\mathrm{t}} \quad \Longrightarrow \quad z_1 H_{\mathrm{i}} + z_1 H_r = z_2 H_{\mathrm{t}}$$

$$H_{\mathrm{i}} \cos\theta_{\mathrm{i}} - H_{\mathrm{r}} \cos\theta_{\mathrm{r}} = H_{\mathrm{t}} \cos\theta_{\mathrm{t}}$$

$$\mu_1 H_{\mathrm{i}} \sin\theta_{\mathrm{i}} + \mu_1 H_{\mathrm{r}} \sin\theta_{\mathrm{r}} = \mu_2 H_{\mathrm{t}} \sin\theta_{\mathrm{t}}$$

同じ式

波動の反射率と透過率

連立方程式を解くと

電界反射係数、透過係数

$$\Gamma_{\mathrm{H}} = \frac{H_{\mathrm{r}}}{H_{\mathrm{i}}} = \frac{z_1 z_2^{-1} - \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}{z_1 z_2^{-1} + \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}$$

$$T_{\mathrm{H}} = \frac{H_{\mathrm{t}}}{H_{\mathrm{i}}} = \frac{2 z_1 z_2^{-1}}{z_1 z_2^{-1} + \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}$$

磁界反射係数、透過係数

$$\Gamma_{\mathrm{E}} = \frac{E_{\mathrm{r}}}{E_{\mathrm{i}}} = \Gamma_{\mathrm{E}}$$

$$T_{\mathrm{E}} = \frac{E_{\mathrm{t}}}{E_{\mathrm{i}}} = z_2 z_1^{-1} T_{\mathrm{H}}$$

ここで、

$$\cos\theta_{\mathrm{t}} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \sin^2\theta_{\mathrm{i}}}$$

$$z_1 z_2^{-1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2}}$$

パワー保存則

$$\Gamma_{\mathrm{E}} \Gamma_{\mathrm{H}} + \boxed{\frac{\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\cos\theta_{\mathrm{i}}}} T_{\mathrm{E}} T_{\mathrm{H}} = 1$$

鉛直成分のみ！

非磁性体の場合

$\mu_2 = \mu_1$ ⇨ $$z_1 z_2^{-1} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} \qquad z_i \cos\theta_t = z_t \cos\theta_i$$

$\mathbf{E}_{//}$成分入射(p偏光)の場合

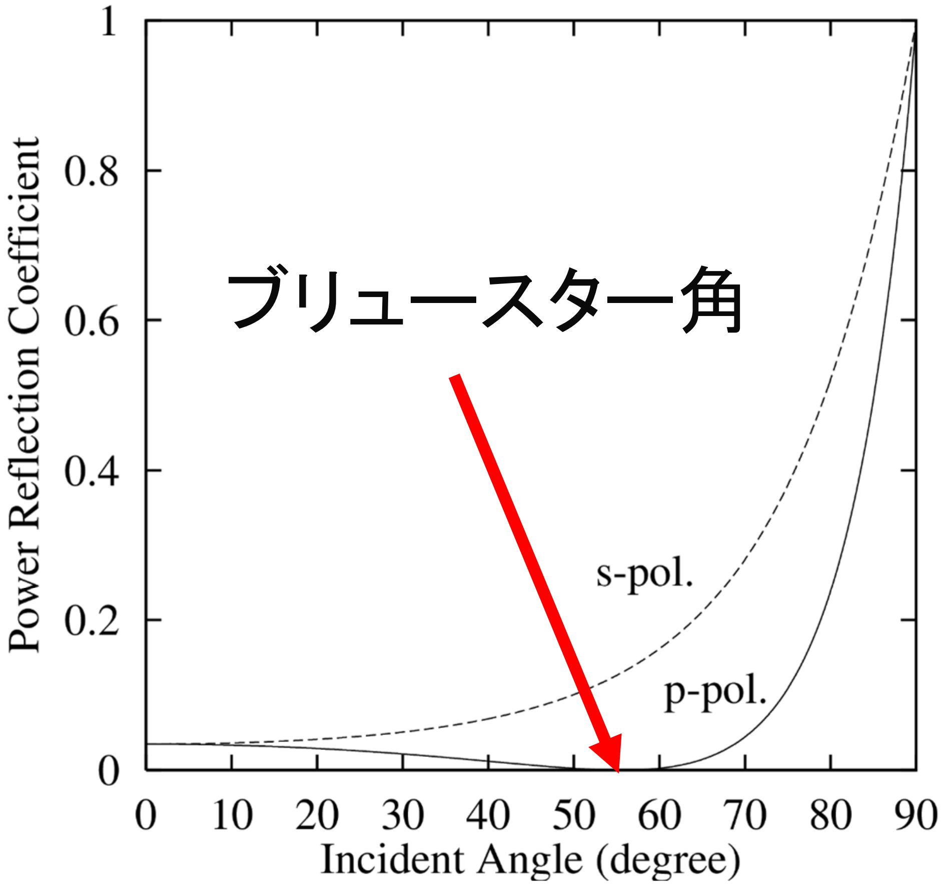
$$\Gamma_E = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$\theta_t = \pi/2 - \theta_i$の時に$\Gamma_E = 0$ ⇨ ブリュースター角 $\tan^{-1}\left(z_1 z_2^{-1}\right)$

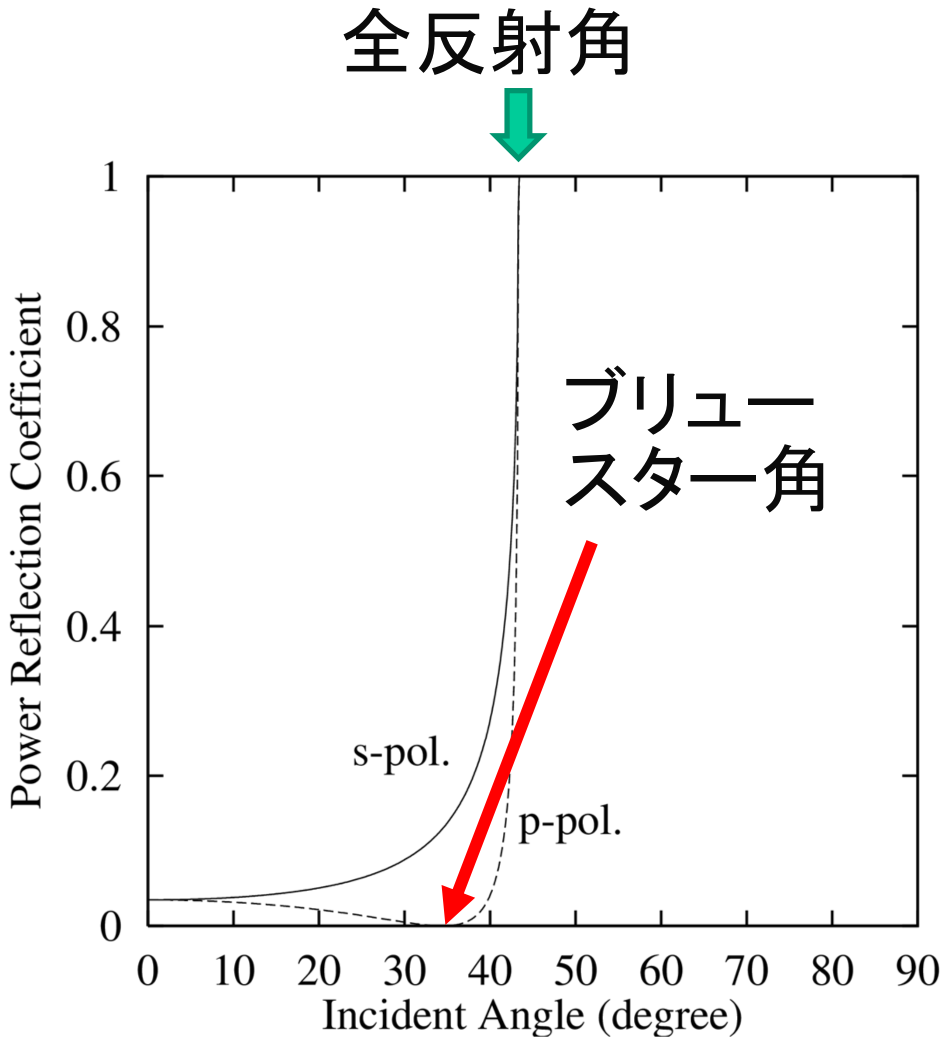
$\mathbf{H}_{//}$成分入射(s偏光)の場合

$$\Gamma_H = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

数値計算例



真空から石英ガラスを見た場合($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$)



石英ガラスから真空を見た場合($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$)

媒質2から入射した場合

1と2を入れ替え。θ_tとθ_iを入れ替え

例えばS波の場合

$$\Gamma_{\mathrm{H}1\to 2} = \frac{z_1 z_2^{-1} - \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}{z_1 z_2^{-1} + \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}$$

$$T_{\mathrm{H}1\to 2} = \frac{2 z_1 z_2^{-1}}{z_1 z_2^{-1} + \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}$$

$$\Gamma_{\mathrm{H}2\to 1} = \frac{z_2 z_1^{-1} - \cos\theta_{\mathrm{i}} / \cos\theta_{\mathrm{t}}}{z_2 z_1^{-1} + \cos\theta_{\mathrm{i}} / \cos\theta_{\mathrm{t}}}$$

$$T_{\mathrm{H}2\to 1} = \frac{2 z_2 z_1^{-1}}{z_2 z_1^{-1} + \cos\theta_{\mathrm{i}} / \cos\theta_{\mathrm{t}}}$$

$$\Gamma_{\mathrm{H}2\to 1} = -\Gamma_{\mathrm{H}1\to 2}$$

大きさ同一、符号反転

$$T_{\mathrm{H}1\to 2} T_{\mathrm{H}2\to 1} - \Gamma_{\mathrm{H}2\to 1}\Gamma_{\mathrm{H}1\to 2} = 1$$

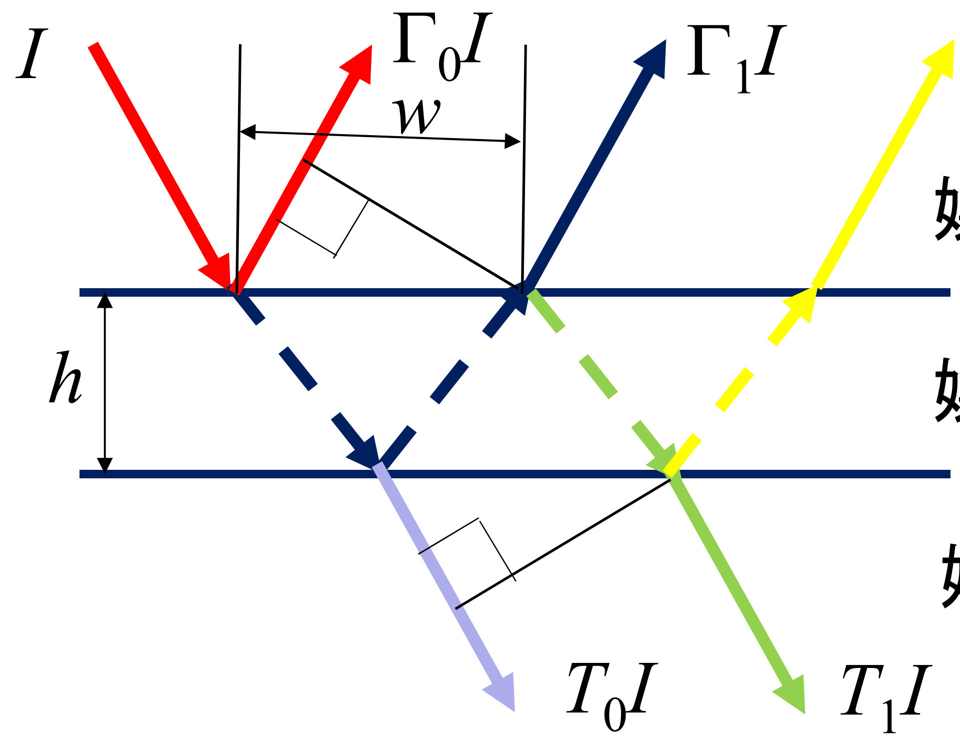
p波でも同様

2波の干渉

I: 入射波振幅

Γ_n: n次反射波振幅

T_n: n次透過波振幅



$$\angle\Gamma_1 - \angle\Gamma_0 = \left[\angle(t_{1\to2}t_{2\to1}\gamma_{2\to3}) - 2\beta_\perp h - \beta_{//}w\right] - \left[\angle\gamma_{1\to2} - \beta_{//}w\right]$$

$$= \angle(t_{1\to2}t_{2\to1}\gamma_{2\to3}) - \angle\gamma_{1\to2} - 2\beta_\perp h$$

$\beta_{//}w$は消失

$$\angle T_1 - \angle T_0 = \angle(\gamma_{2\to3}t_{2\to1}) - 2\beta_\perp h$$

$\gamma_{m\to n}$　m層からn層へ入射した時の反射係数

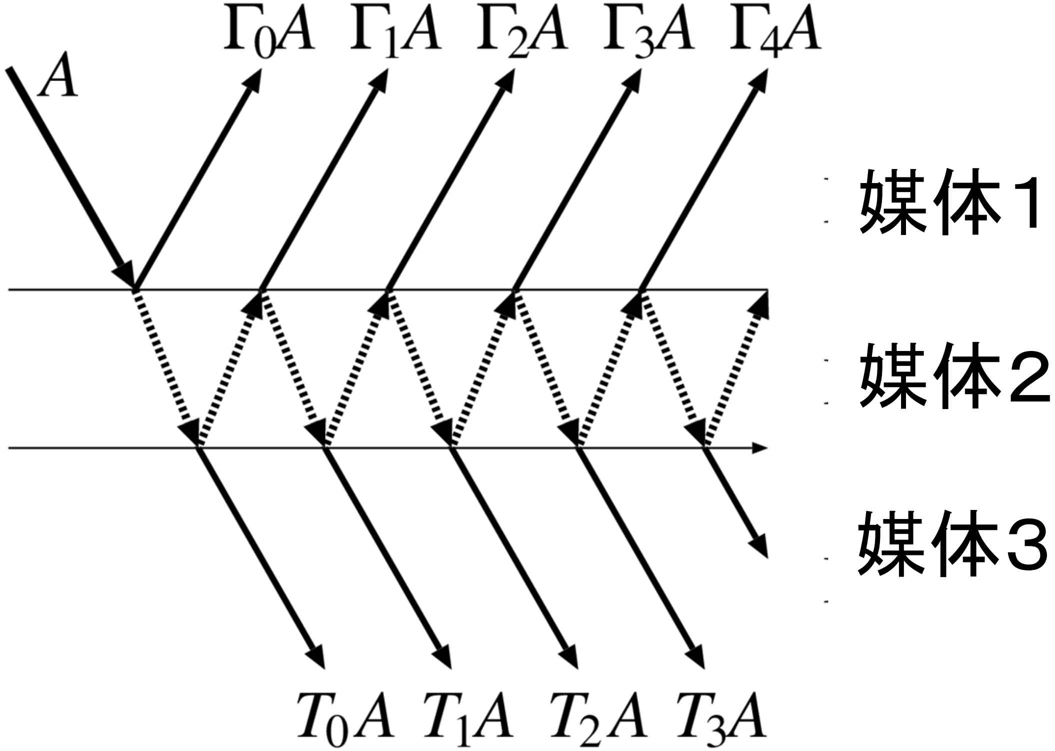
$t_{m\to n}$　m層からn層へ入射した時の透過係数

多重反射

A: 入射波振幅

$\Gamma_n A$: n次反射波振幅

$T_n A$: n次透過波振幅



$$\Gamma_0 = \gamma_{1\to 2}$$

$$\Gamma_n = t_{1\to 2} t_{2\to 1} \gamma_{2\to 3} \exp(-2j\phi)\left[\gamma_{2\to 3}\gamma_{2\to 1}\exp(-2j\phi)\right]^{n-1}$$

$$T_n = t_{1\to 2} t_{2\to 3} \exp(-j\phi)\left[\gamma_{2\to 3}\gamma_{2\to 1}\exp(-2j\phi)\right]^{n}$$

$\gamma_{m\to n}$　m層からn層へ入射した時の反射係数

$t_{m\to n}$　m層からn層へ入射した時の透過係数

ϕ　第2層伝搬による位相遅れ$(2\beta_{\perp} h)$ h:第2層の厚さ

$$1-\gamma_{1\to2}^2$$

$$\Gamma=\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma_n=\left[\gamma_{1\to2}+\boxed{t_{1\to2}t_{2\to1}}\frac{\gamma_{2\to3}\exp(-2j\phi)}{1-\boxed{\gamma_{2\to3}\gamma_{1\to2}\exp(-2j\phi)}}\right]$$

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}T_n=\frac{t_{2\to3}t_{1\to2}\exp(-j\phi)}{1-\gamma_{2\to3}\gamma_{1\to2}\exp(-2j\phi)}$$

$\Gamma_n/\Gamma_{n\text{-}1}$

$\gamma_{2\to3}=-\gamma_{1\to2}$の時　$\phi=n\pi$の時、$\Gamma=0$

$$\Gamma=\gamma_{1\to2}\frac{1-\exp(-2j\phi)}{1-\gamma_{1\to2}^2\exp(-2j\phi)}$$

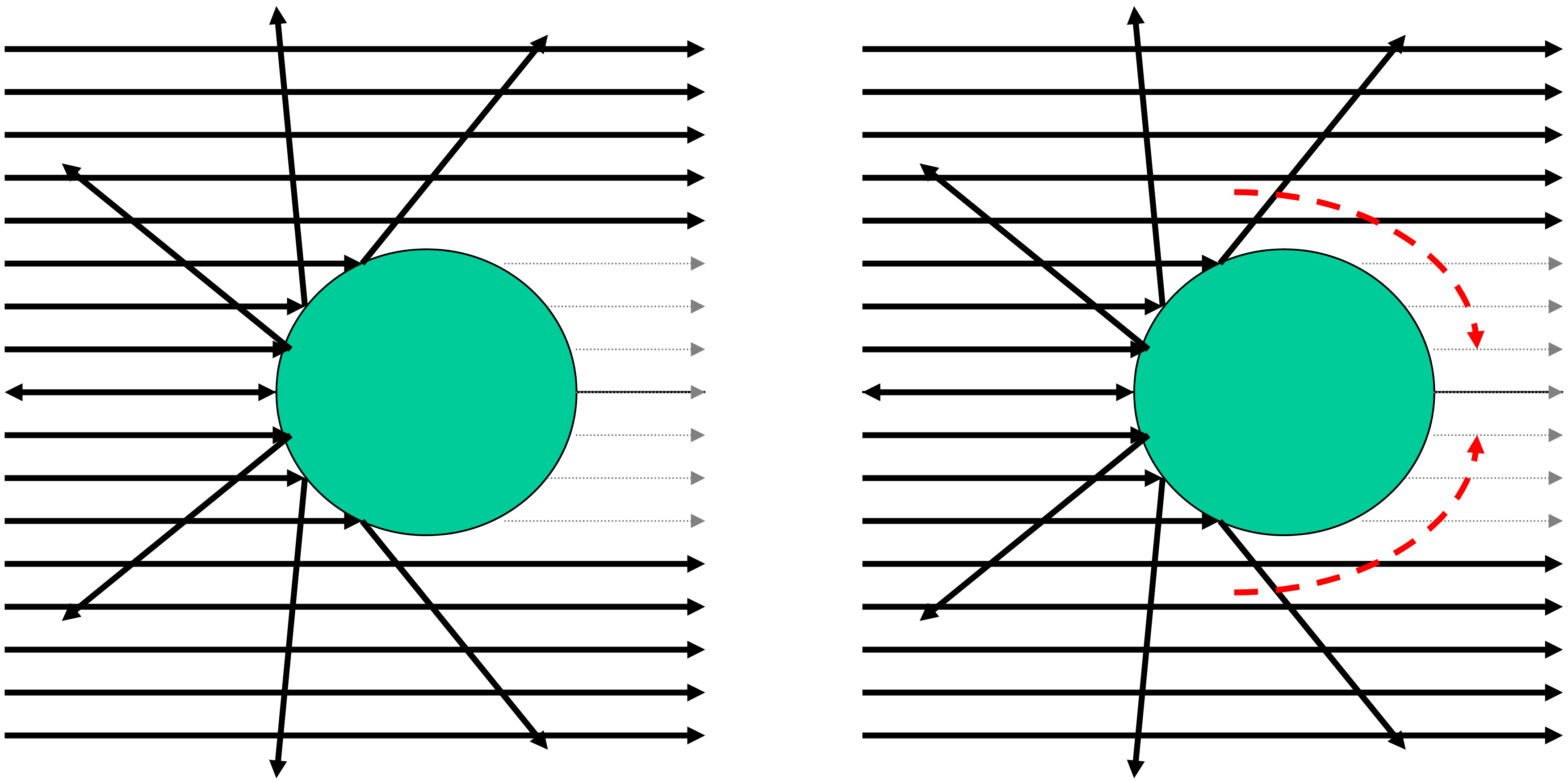
第2層上下面での
反射波間の相殺

$\gamma_{2\to3}=\gamma_{1\to2}$の時　$\phi=(n+1/2)\pi$の時、$\Gamma=0$

$$\Gamma=\gamma_{1\to2}\frac{1+\exp(-2j\phi)}{1+\gamma_{1\to2}^2\exp(-2j\phi)}$$

応用例：無反射コーティング

物体による散乱



幾何学的散乱　　　　回折による回り込み発生

その他の電磁波減衰機構

レーリー散乱　散乱体が波長よりも十分小さい場合

散乱係数が周波数の４乗に比例、前方・後方に強く散乱

例：青い空、赤い夕陽

ミー散乱　散乱体が波長とほぼ同程度の場合

周波数依存性小、前方が後方より強く散乱

例：白い雲

幾何学的散乱　散乱体が波長よりも十分大きい場合

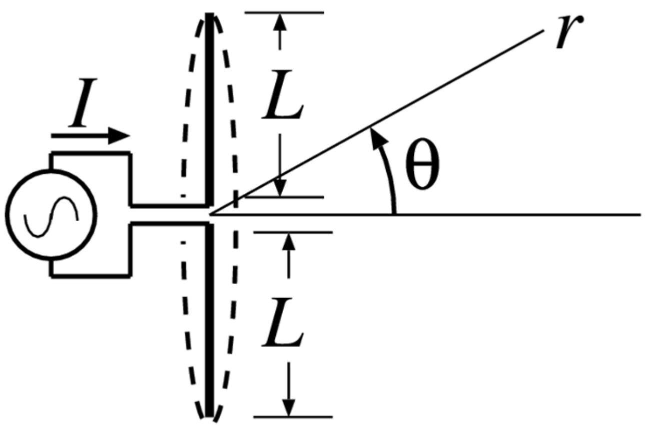
＋回折

吸収　分子・原子構造の共振

他のエネルギーへの変換（電流、音波、熱等）

ダイポールアンテナからの放射

$$i(x)=I\sin\{\beta_l(L-|x|)\}\exp(j\omega t)$$



$$A_x=\int_{-L}^{L}\frac{\mu I\sin\{\beta_l(L-|x'|)\}\exp(-j\beta d)}{4\pi d}dx'$$

ここで $d=\sqrt{(r\sin\theta-x')^2+r^2\cos^2\theta}$

$r >> L$ とすれば

$$d\sim\sqrt{r^2-2rx'\sin\theta}\sim r-x'\sin\theta$$

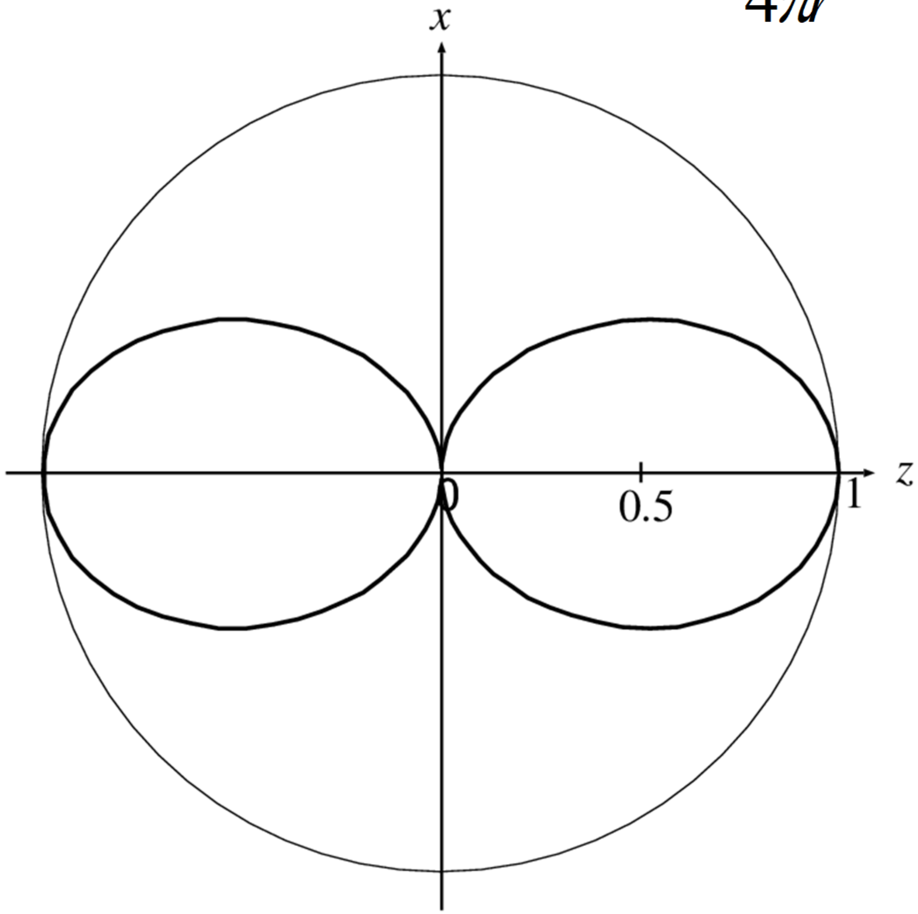
$$A_x\sim\int_{-L}^{L}\frac{\mu I\sin\{\beta_l(L-|x'|)\}\exp\{-j\beta(r-x'\sin\theta)\}}{4\pi(r-x'\sin\theta)}dx'$$

$$\sim\frac{\mu I\exp(-j\beta r)}{4\pi r}\int_{-L}^{L}\sin\{\beta_l(L-|x'|)\}\exp(j\beta x'\sin\theta)dx'$$

ダイポールアンテナからの放射

$$B_y \sim j\beta A_x \cos\theta \sim \frac{j\beta\mu I \exp(-j\beta r)}{4\pi r}\cos\theta \frac{\beta \sin\theta \sin(\beta L \sin\theta) - \beta_l \sin(\beta_l L)}{\beta^2 \sin^2\theta - \beta_l^2}$$

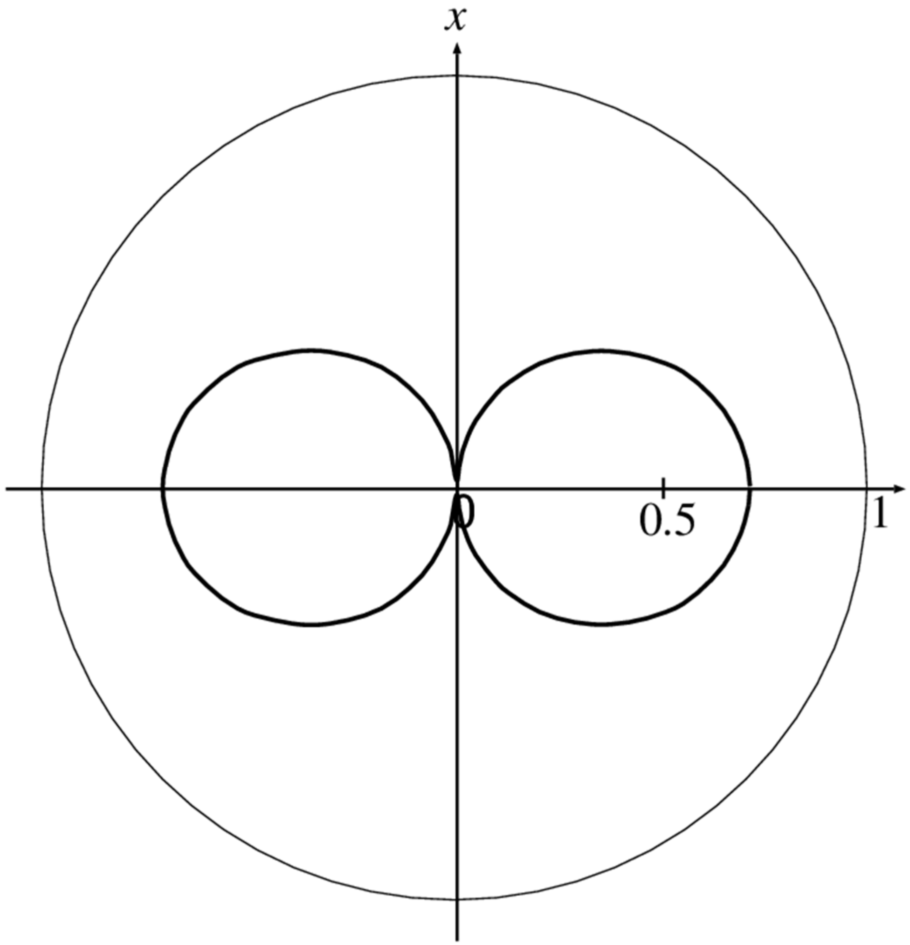
$\beta_l = \beta$とすれば $B_y \sim \dfrac{j\mu I \exp(-j\beta r)}{4\pi r} \dfrac{\sin(\beta L) - \sin\theta \sin(\beta L \sin\theta)}{\cos\theta}$



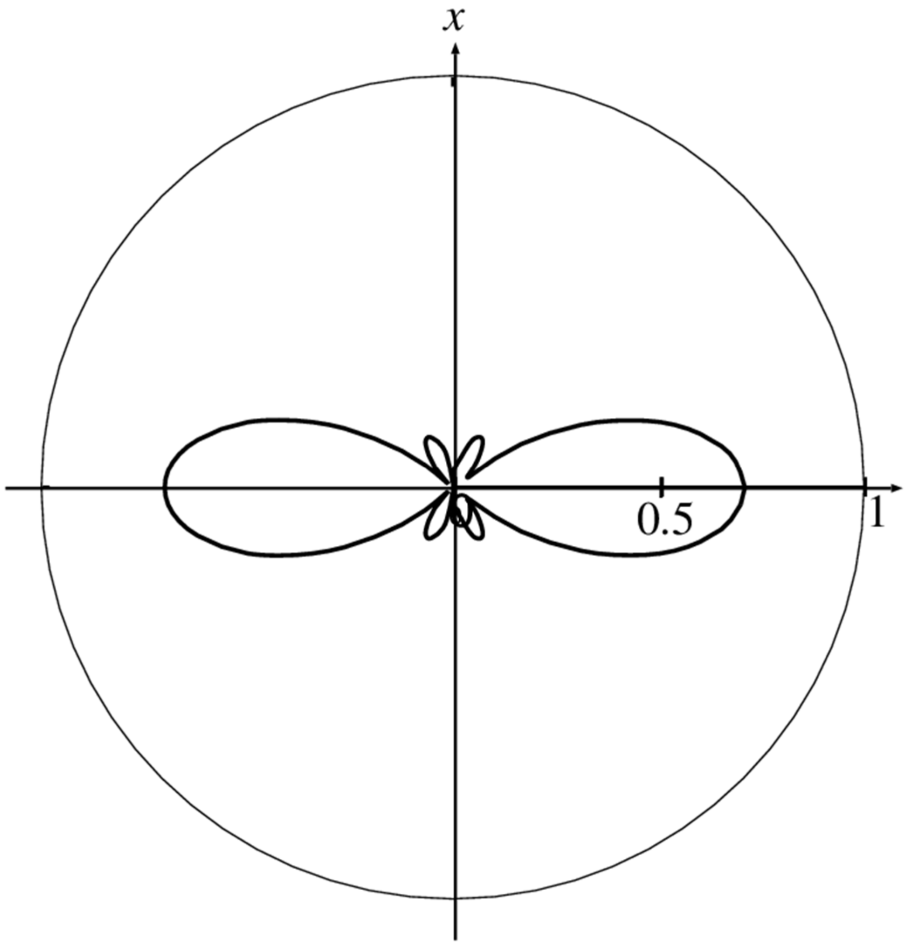
$\beta L = \pi$の時の放射パターン

放射パターンの周波数依存性

βL=0.5πの時



βL=1.5πの時



放射パワー密度

$$P_r = \frac{z_0}{2}\left|\frac{B_y}{\mu}\right|^2 = \frac{z_0 I^2}{32\pi^2 r^2}\left(\frac{\sin(\beta L) - \sin\theta \sin(\beta L \sin\theta)}{\cos\theta}\right)^2$$

全放射パワー

$$P_t = \int_S P_r dS$$

放射抵抗(アンテナインピーダンスの実部)

$$R_r = \frac{2P_t}{I^2}$$

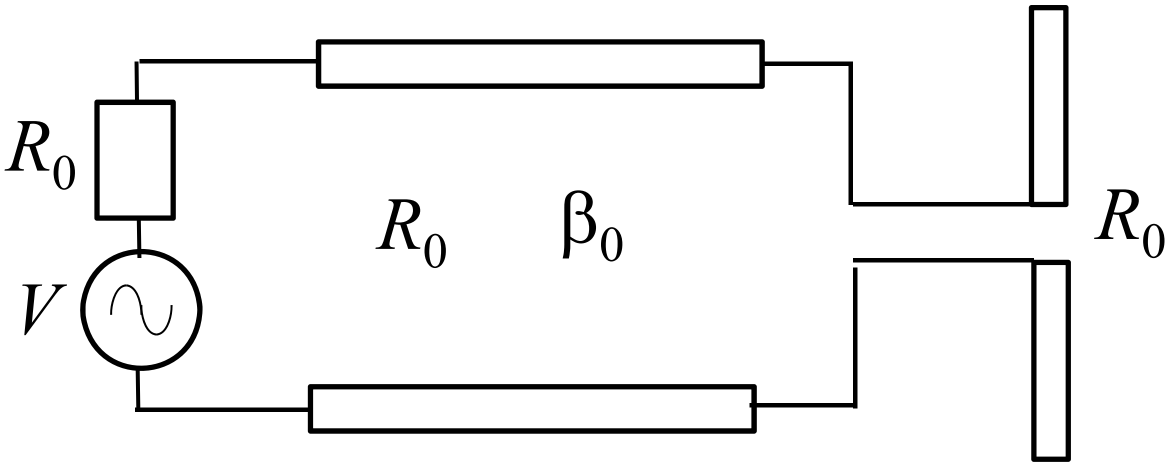
指向性

$$D = \frac{4\pi r^2 P_r\big|_{\theta=0}}{P_t} = \frac{\sin^2(\beta L)}{4\pi R_r / z_0}$$

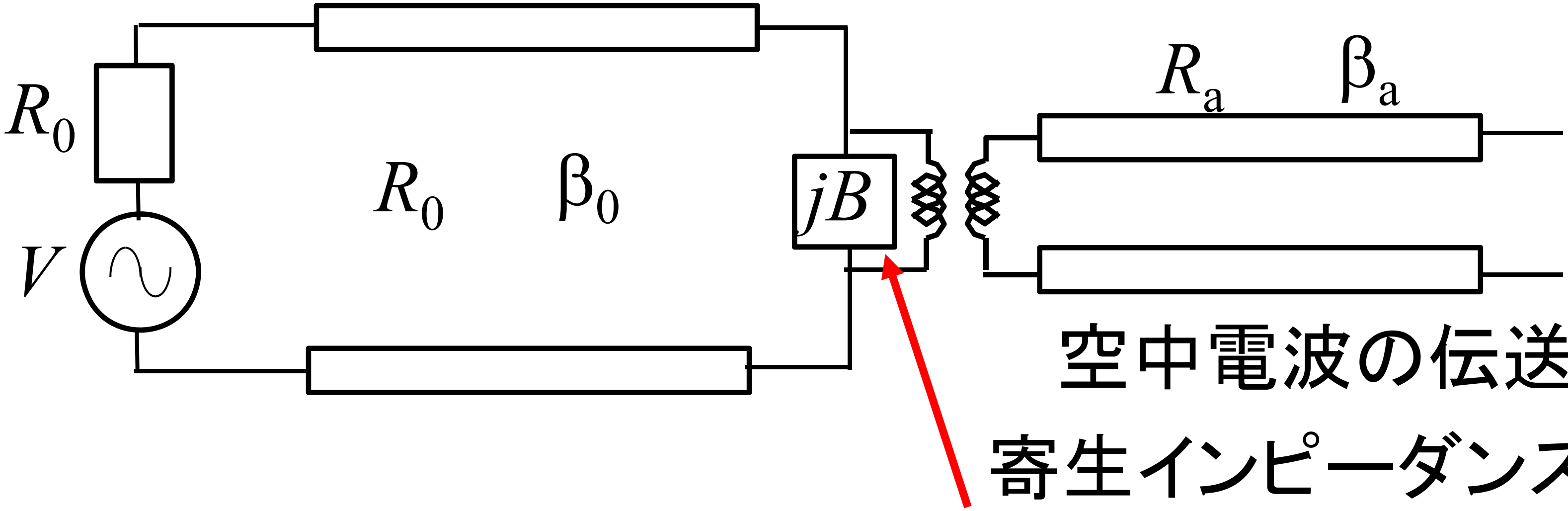
アンテナ利得

$$10\log_{10} D \ \ \mathrm{dBi}$$

アンテナのインピーダンスとは？



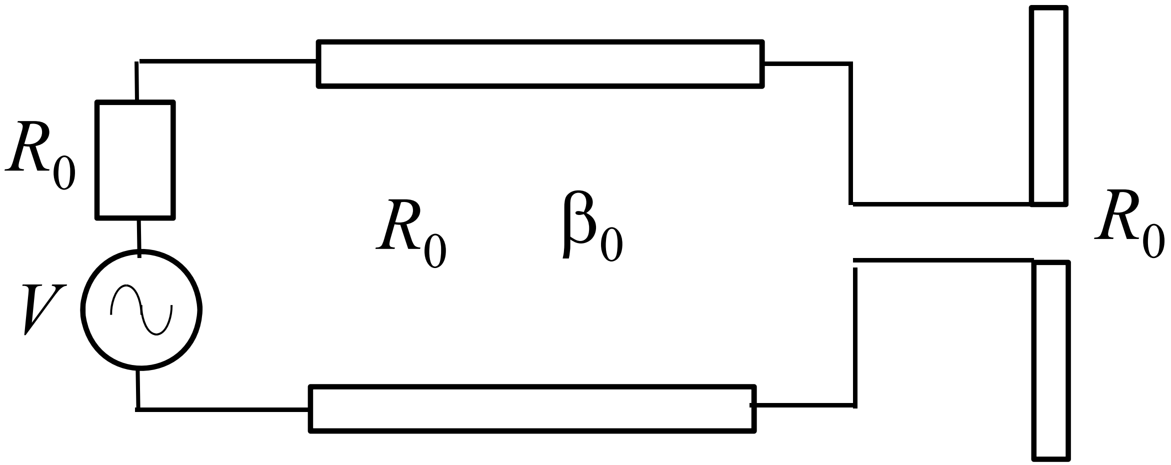
平衡伝送＋平衡アンテナ入力（○）



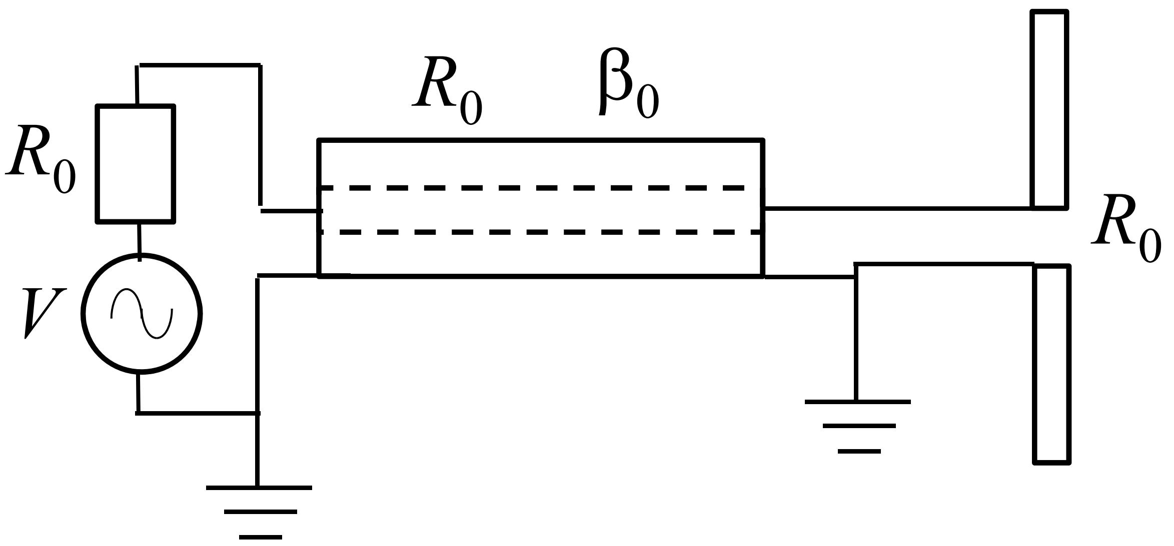
空中電波の伝送路

寄生インピーダンスと非放射電磁波の影響

ダイポールアンテナへの電力供給

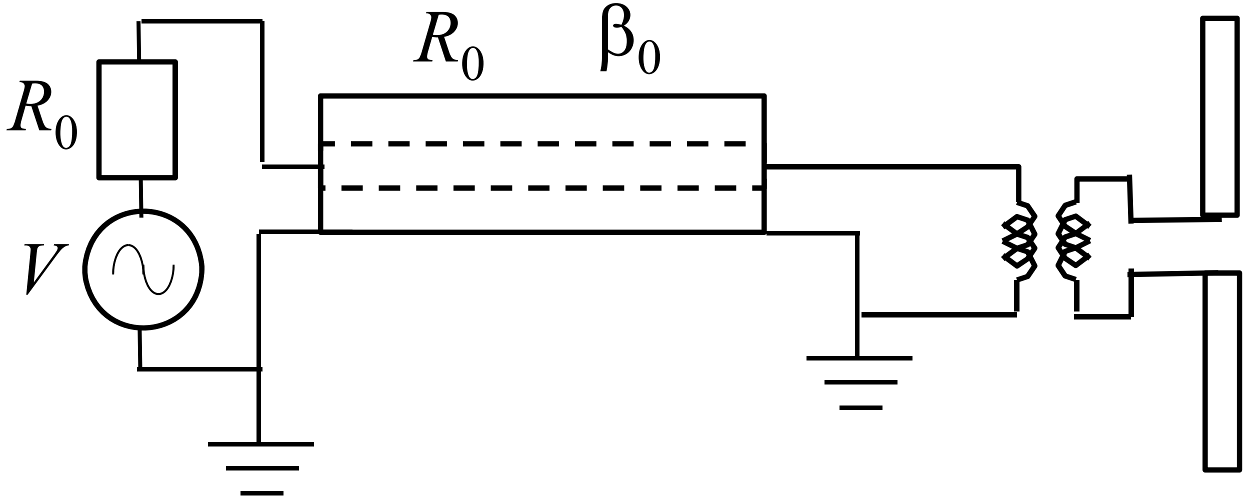


平衡伝送＋平衡アンテナ入力（○）

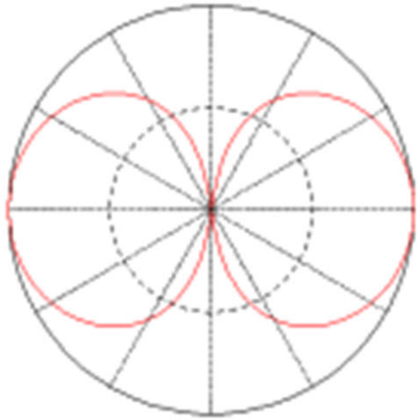
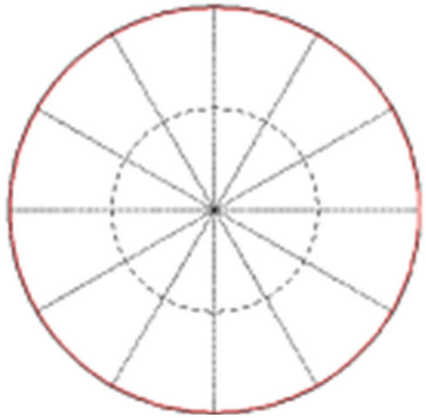
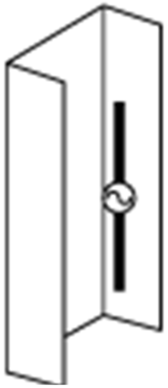
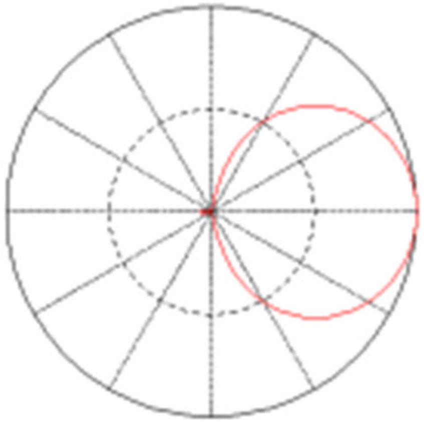
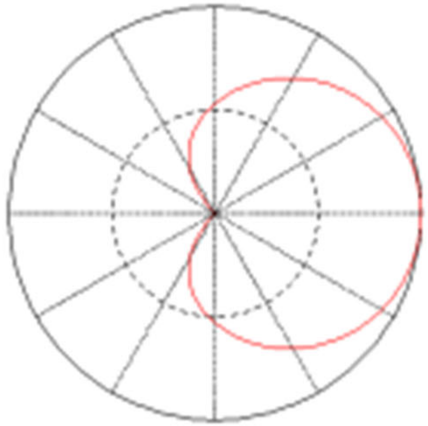
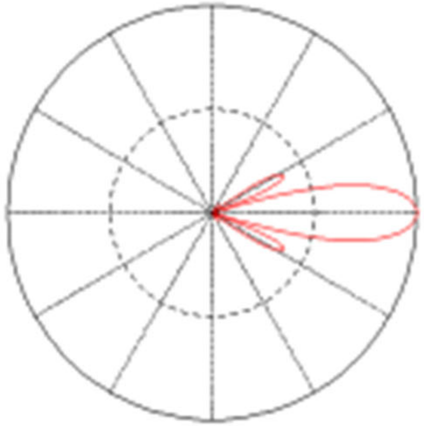
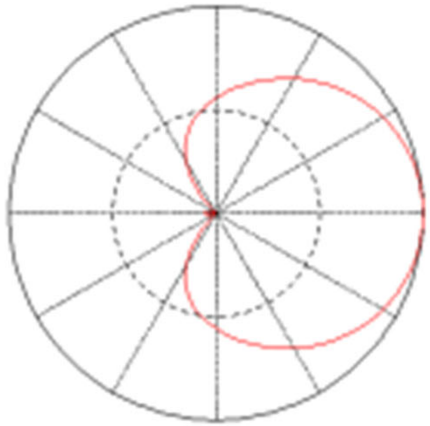


不平衡伝送＋平衡アンテナ入力（×）

ダイポールアンテナへの電力供給



不平衡伝送＋バラン＋平衡アンテナ入力

	利得	垂直面内指向性	水平面内指向性
	2.1 dBi		
	7.0 dBi		
	13.0 dBi		

http://www.den-gyo.com/labo/kouza/kouza03.html