令和2年9月25日版

伝送工学

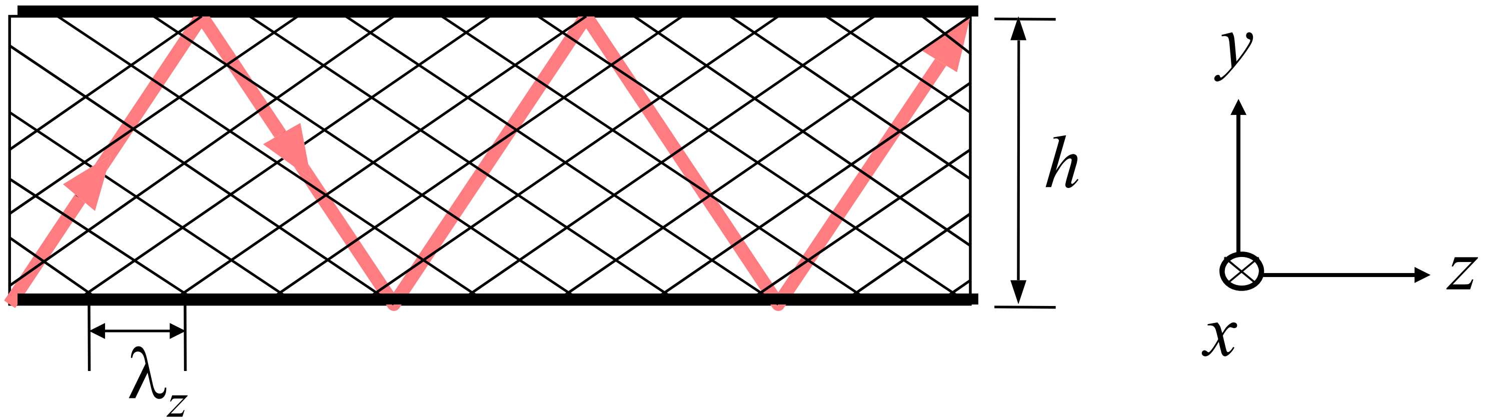
Part 6:導波路

千葉大学工学部
総合工学科電気電子工学コース
橋本研也
k.hashimoto@ieee.org
http://www.te.chiba-u.jp/lab/ken

閉じた導波路

上下面で鏡面反射
＝　上下面内にエレルギー集中

$\angle \gamma_{2\to 3} = \angle \gamma_{2\to 1} = 0 \text{ or } \pi$　　例:上下面が鏡(Γ_E=-1)



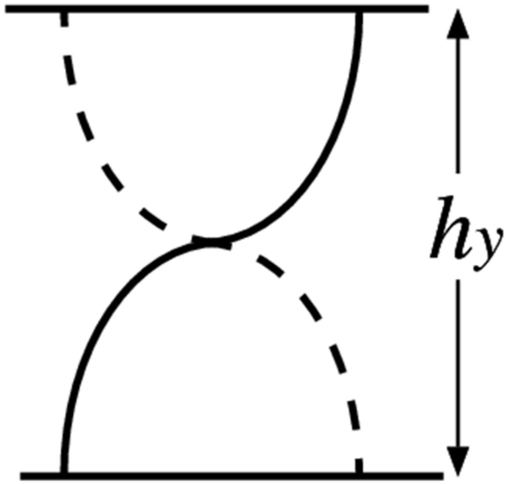
横共振条件 $\beta_y h = n\pi$ ⇒ 伝搬モードの波数(=2π/λ_z)

$$\beta_z = \sqrt{\beta_0^2 - (n\pi / h)^2}$$

β_0: 導波路内での波数 =ω/c

c: 導波路内での電磁波の速度

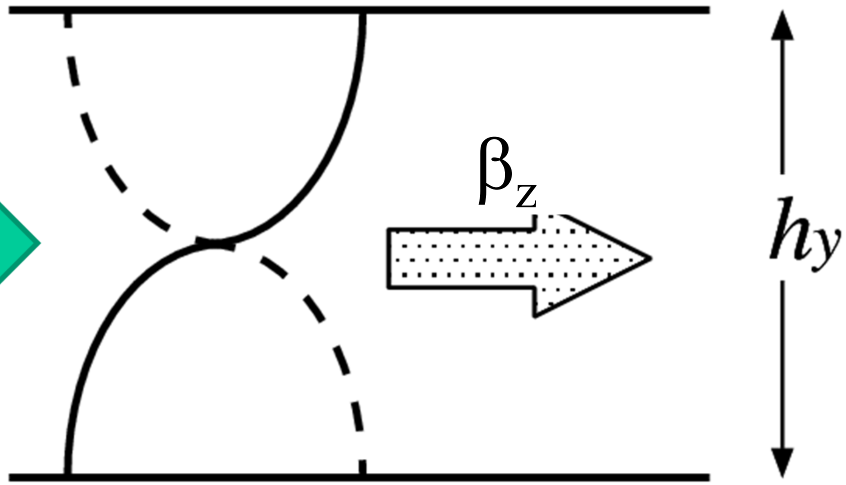
厚み共振



$$\beta_y h_y = n_y \pi$$

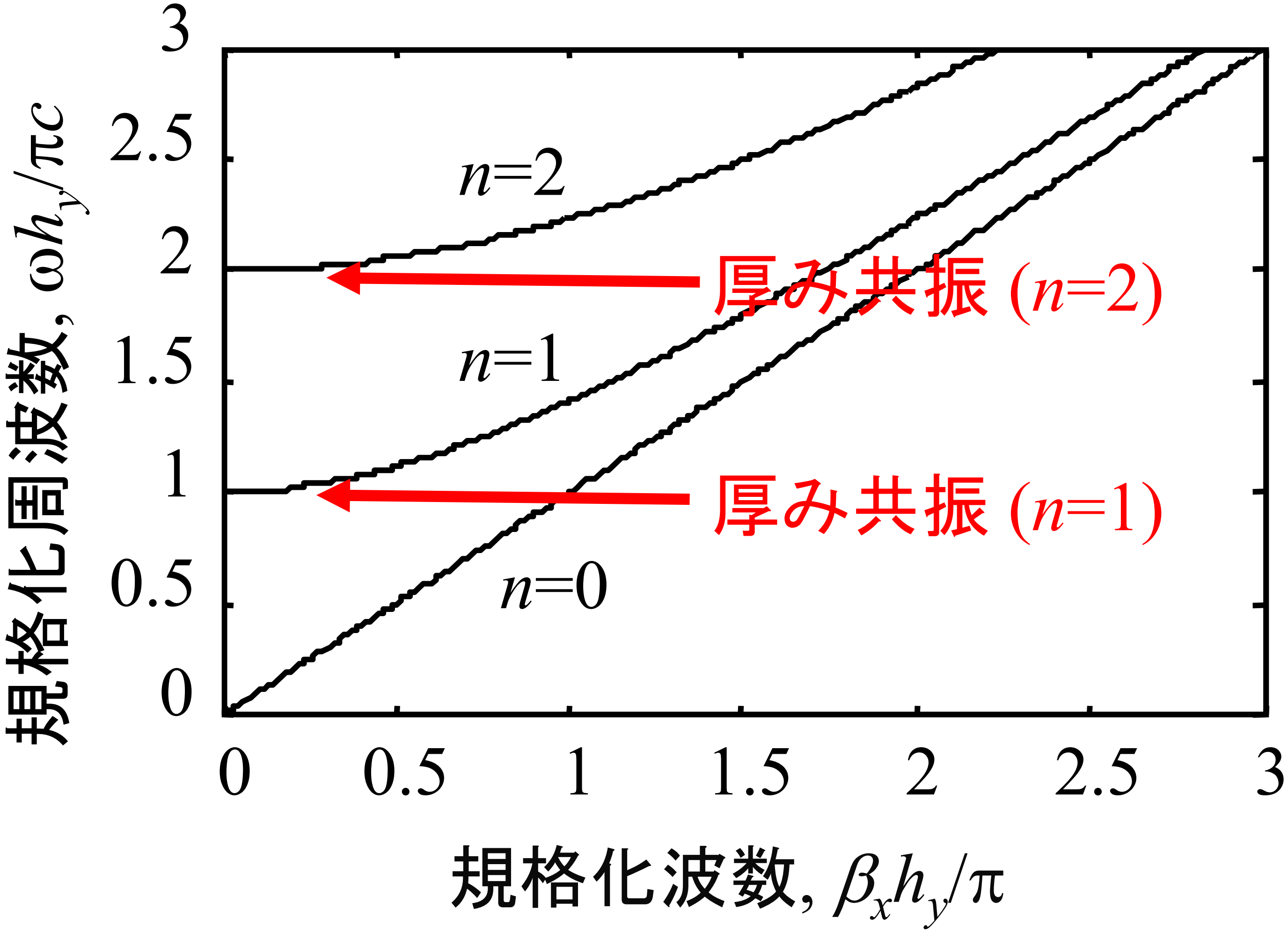
$$\left(\frac{n_y \pi}{h_y}\right)^2 = \beta_0^2$$

横共振条件

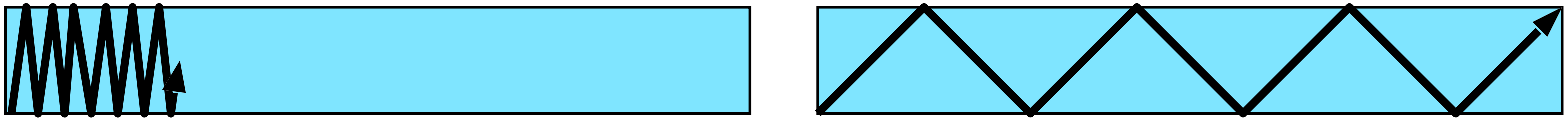


$$\beta_y h_y = n_y \pi$$

$$\underline{\beta_z^2} + \left(\frac{n_y \pi}{h_y}\right)^2 = \beta_0^2$$

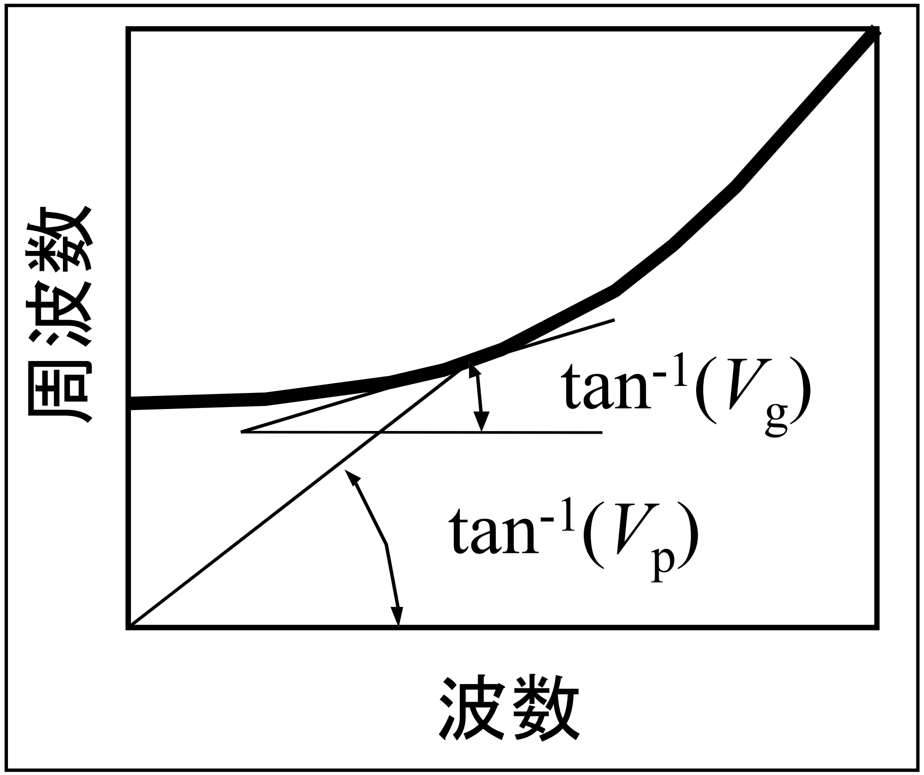


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
n=2
n=1
n=0
厚み共振 (n=2)
厚み共振 (n=1)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
規格化周波数, ωh_y/πc
規格化波数, β_xh_y/π



(a) 遮断周波数付近　(b) 遮断周波数よりずっと上

導波モードの伝搬



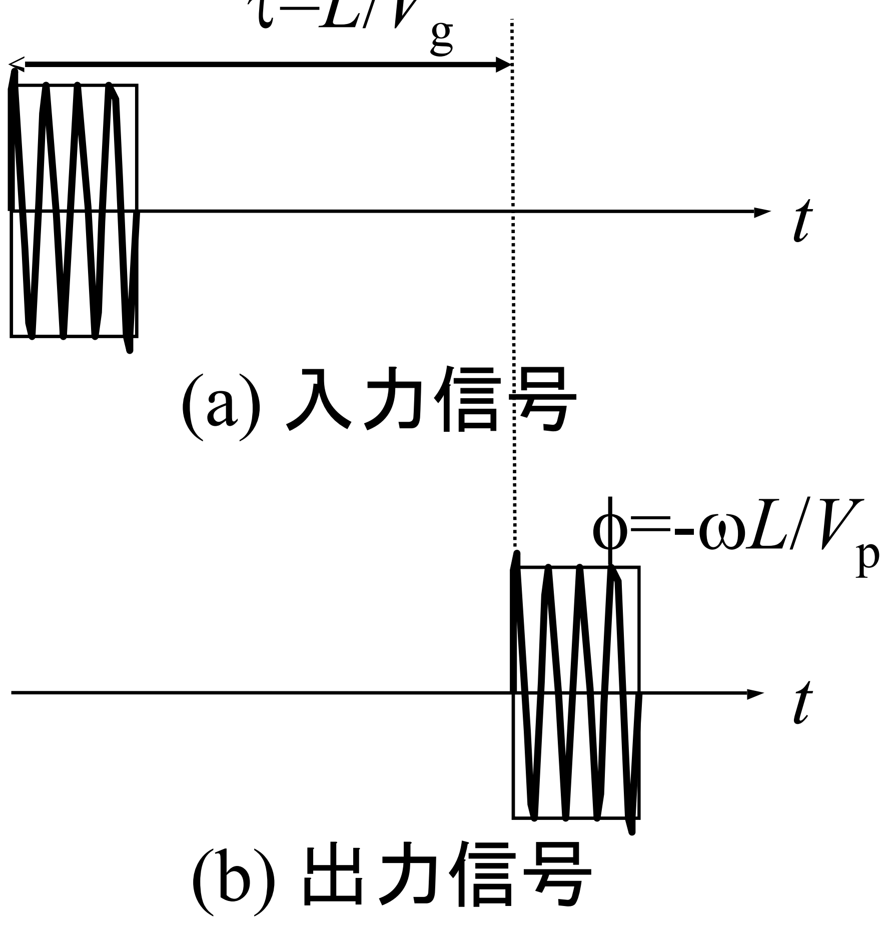
$V_p=\omega/\beta_x$: 位相速度

見かけの位相の速度

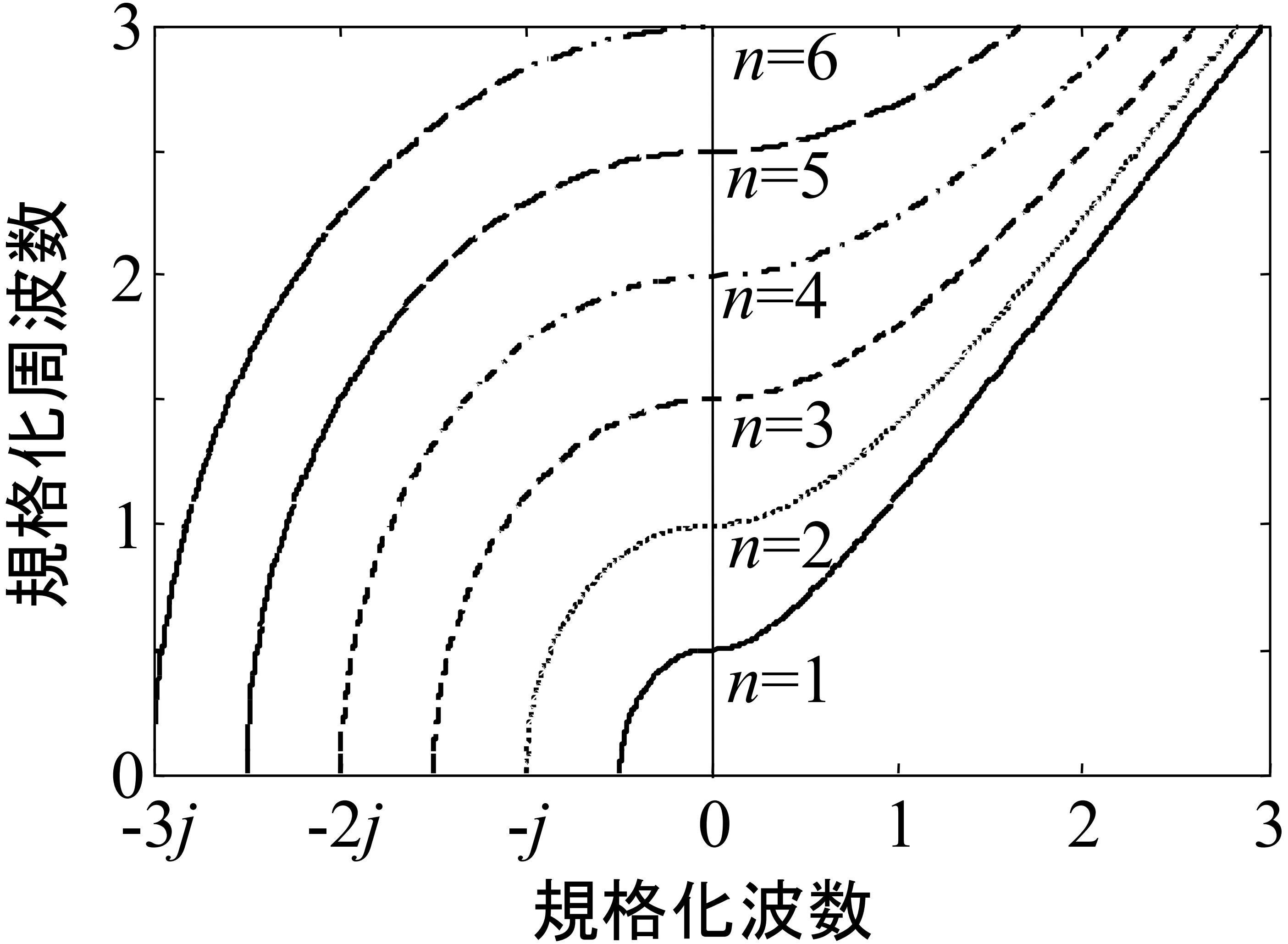
$V_g=\partial\omega/\partial\beta_x$: 群速度

パワー伝送の速度

信号伝送における位相速度と群速度



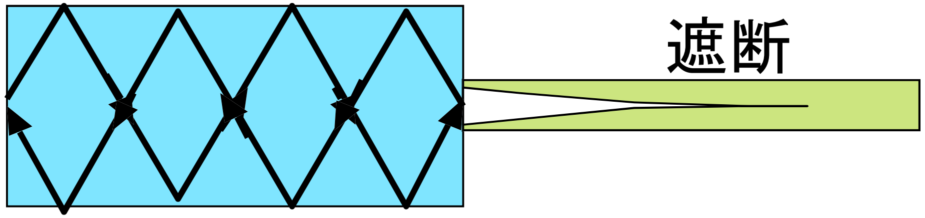
遮断周波数以下では？



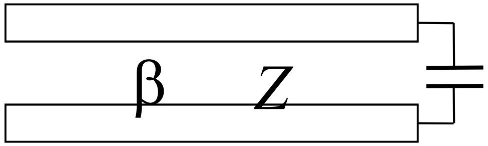
エバネセント場の振る舞い

エバネセント場の影響

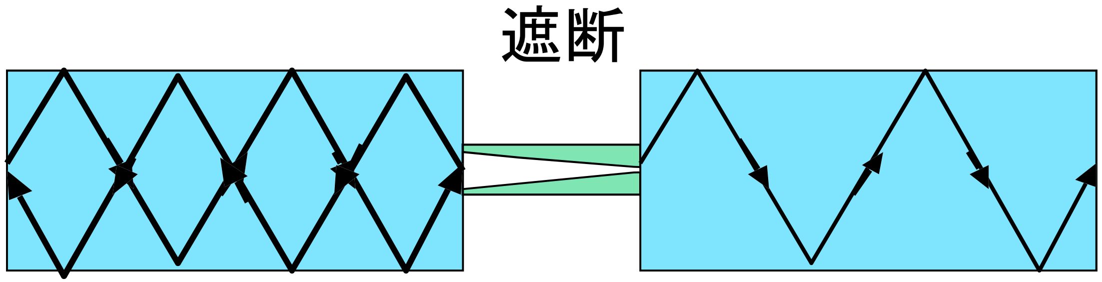
(a)



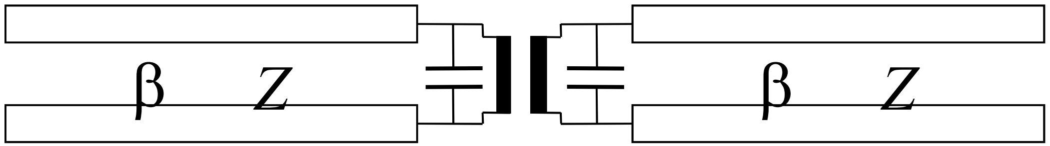
(b)



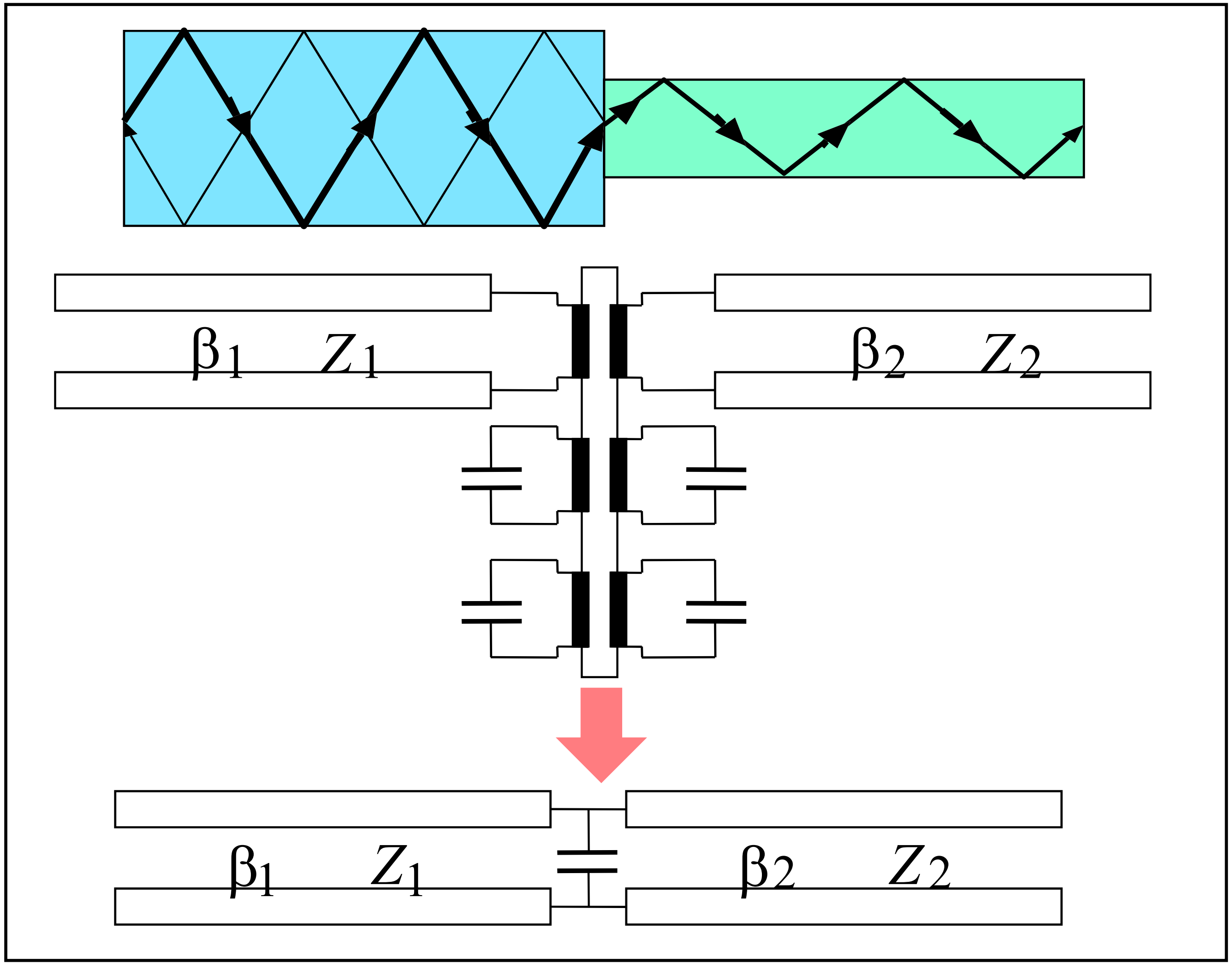
(c)



(d)



遮断でなくても



高次モードの影響

n=0の時(上下面は金属、$\beta_0 h$<<1を仮定)

$$\mathbf{E} = -E\mathbf{y}$$

$$\mathbf{H} = H\mathbf{x} \qquad H = z_0 E$$

上下電極間の電位差＝Eh

上面での電流密度＝ $+H$ (+z方向)

下面での電流密度＝ -H (-z方向)

n=0の時(上下面は金属、$\beta_0 h$<<1を仮定)

$\mathbf{E} = -E\mathbf{y}$

$\mathbf{H} = H\mathbf{x}$

$H = z_0 E$

$V_+ = Eh\exp(-j\beta_z z)$

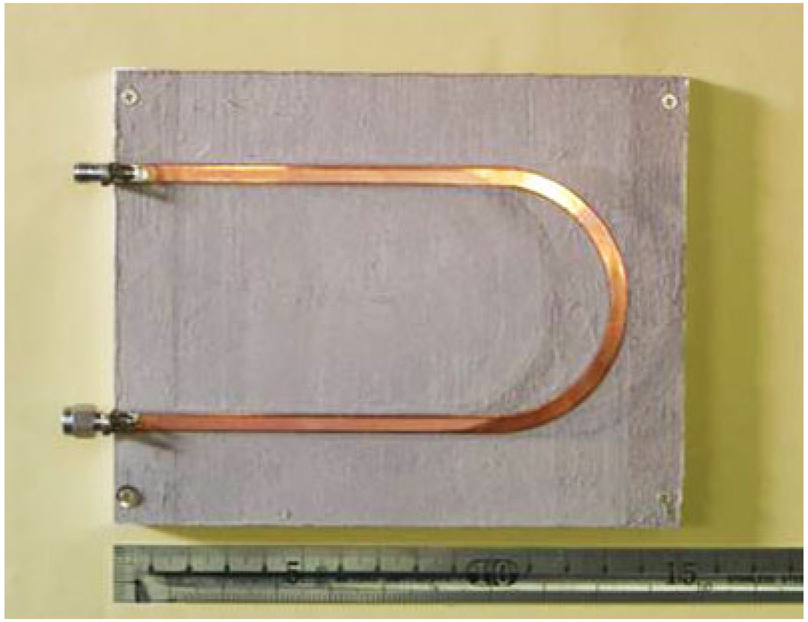
$I_+ = Hw\exp(-j\beta_z z)$

伝送線路の特性インピーダンス $Z_0 = z_0 h/w$

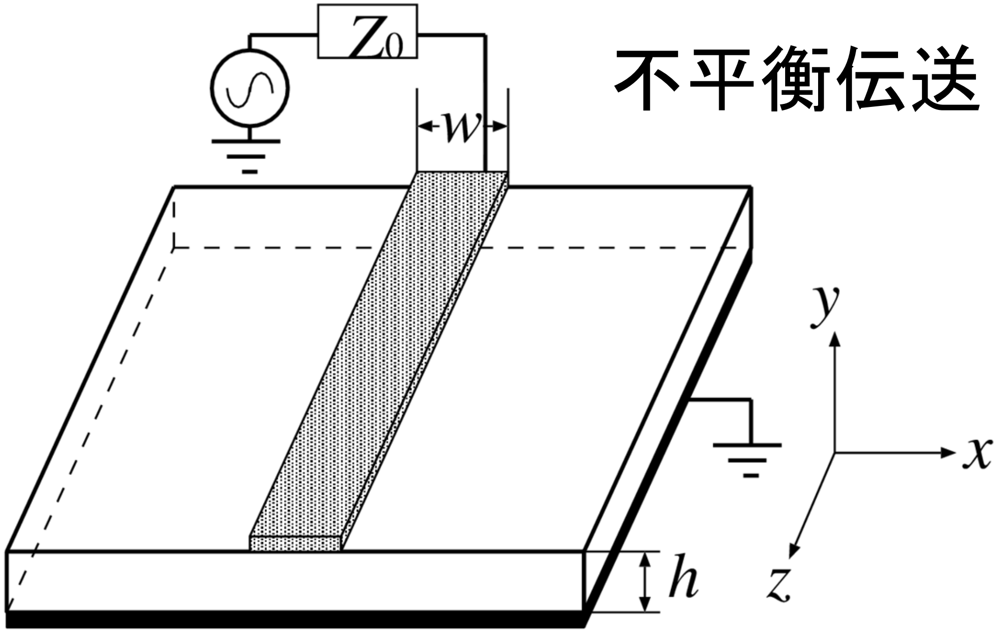
単位長さあたりの静電容量 $C = \varepsilon w/h$

単位長さあたりのインダクタンス $L = \mu h/\mathrm{w}$

マイクロストリップ線路(プリント基板で実現)

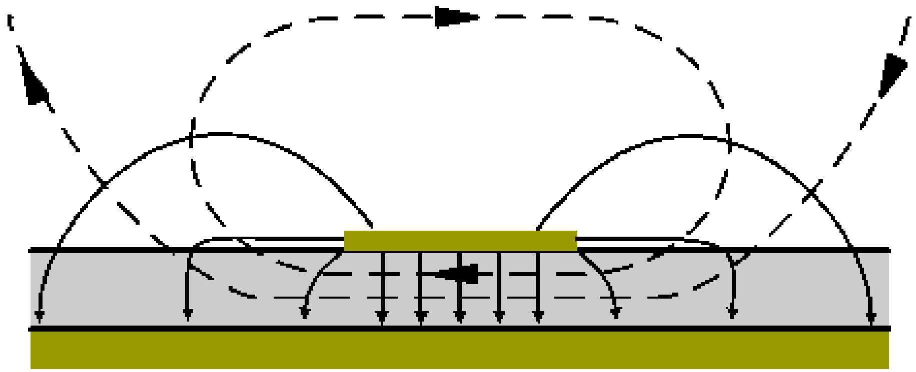


http://www.elec.ryukoku.ac.jp/about/high-sc/page06.html



不平衡伝送

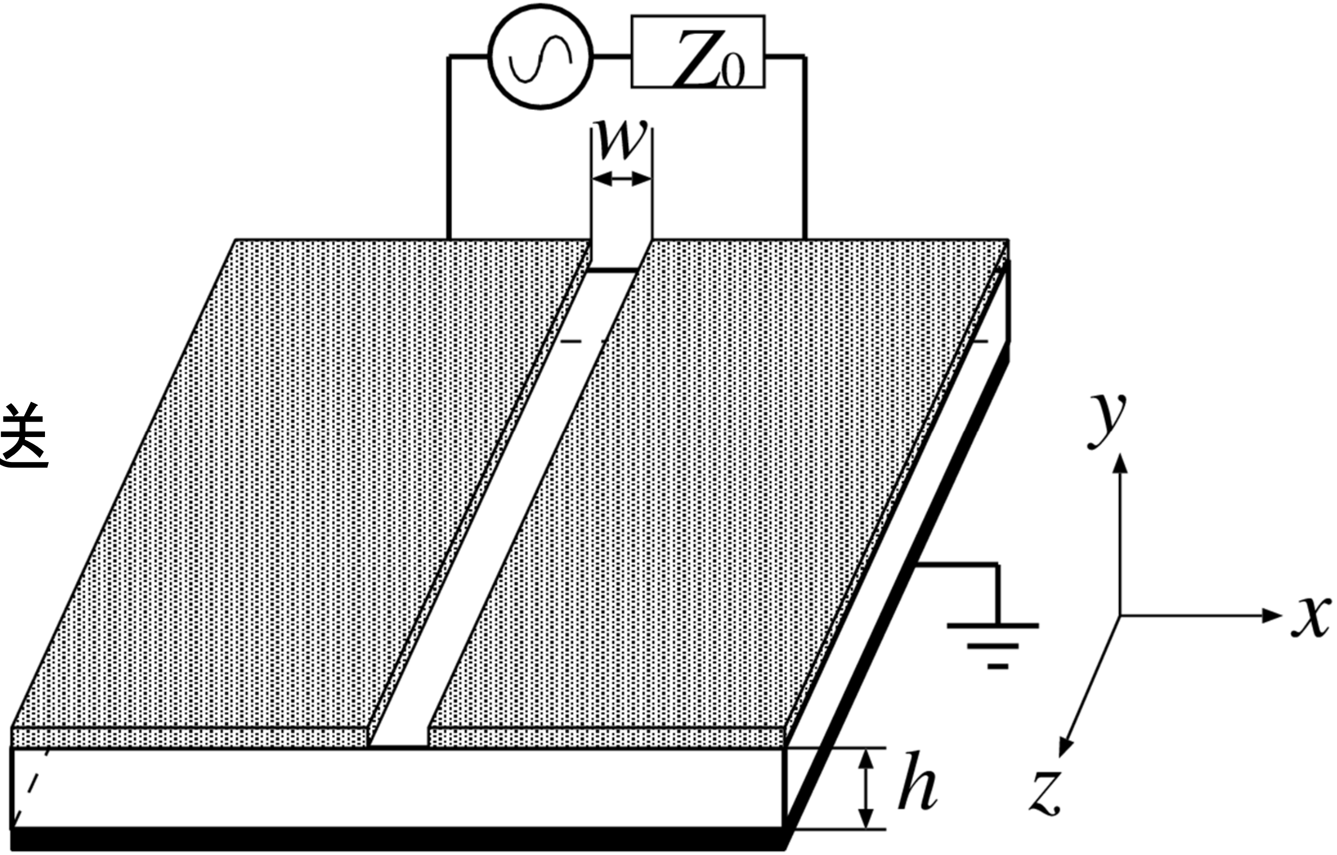
wが狭い時: 電界や磁界の染み出しのため、wや電極厚により補正が必要



実線－電気力線、破線－磁力線

http://www.hide-radio.com/dist_ele_txt6.html

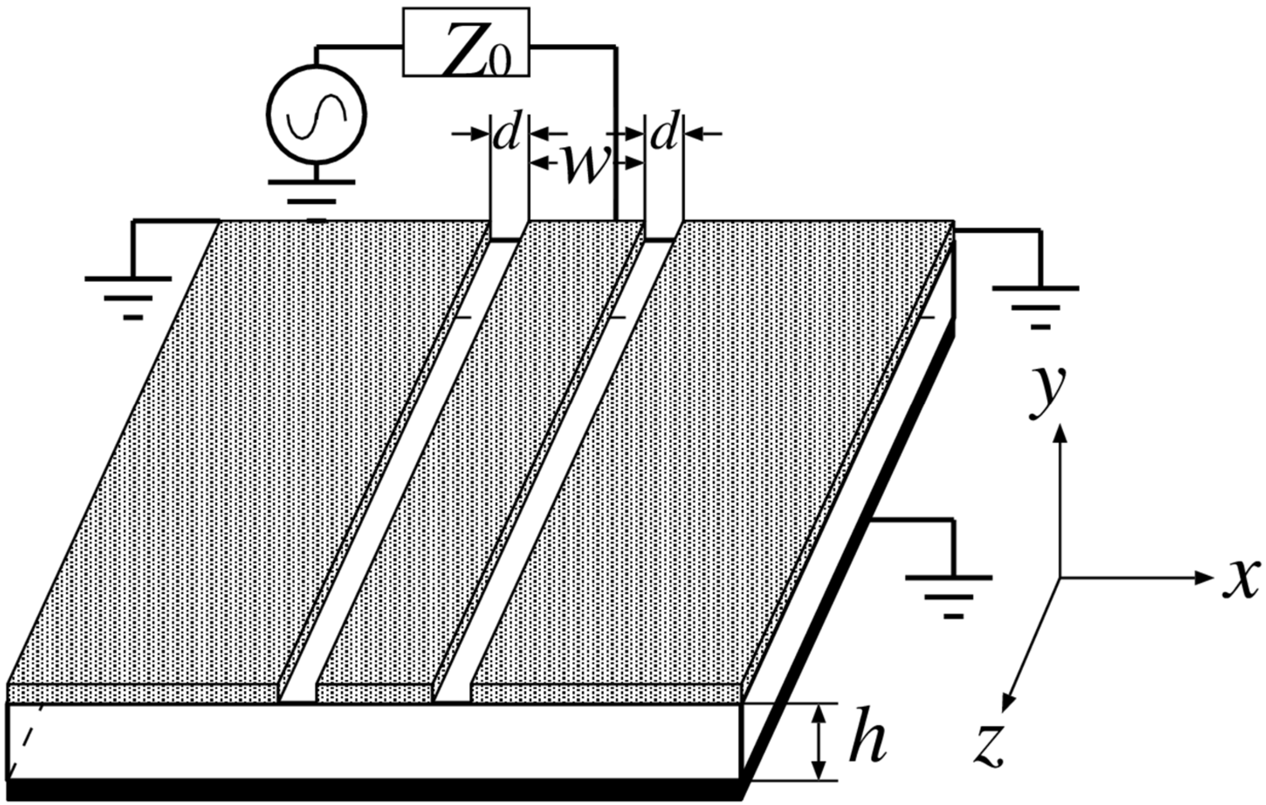
スロット線路(プリント基板で実現)



平衡伝送

wが狭い時: wや電極厚により補正が必要

コプレーナー線路(プリント基板で実現)

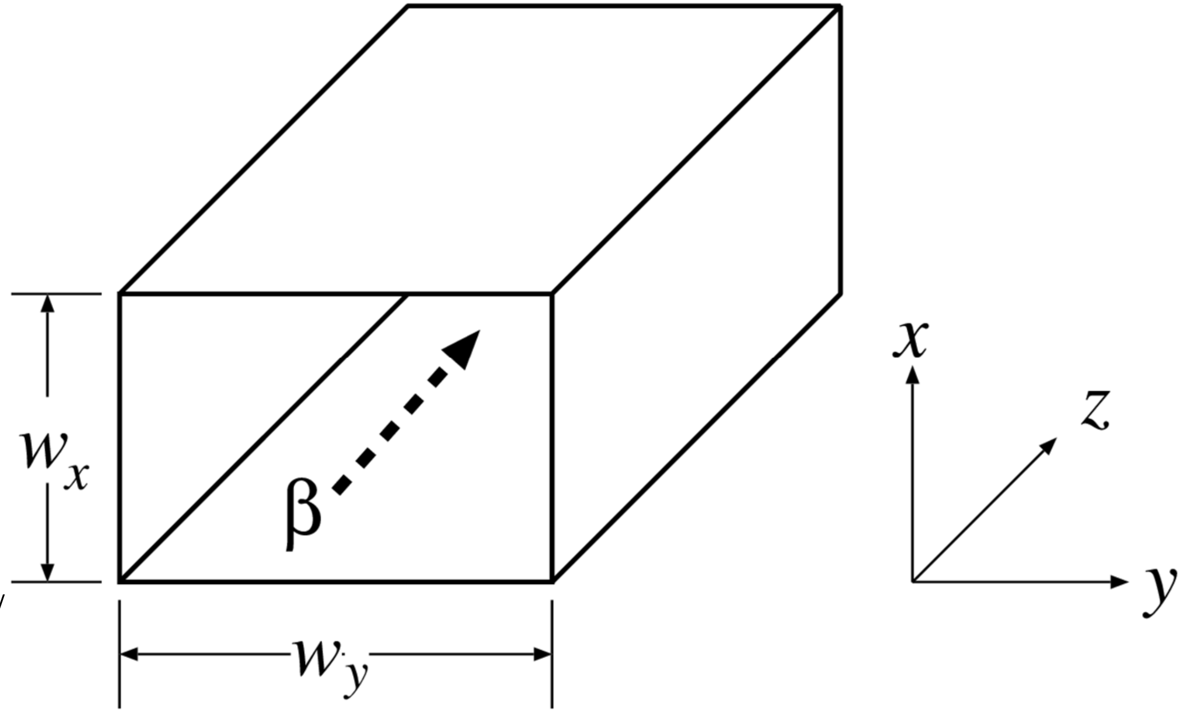


不平衡伝送

wが狭い時: wや電極厚により補正が必要

矩形導波路

http://www.e-santec.com/product/



横共振条件

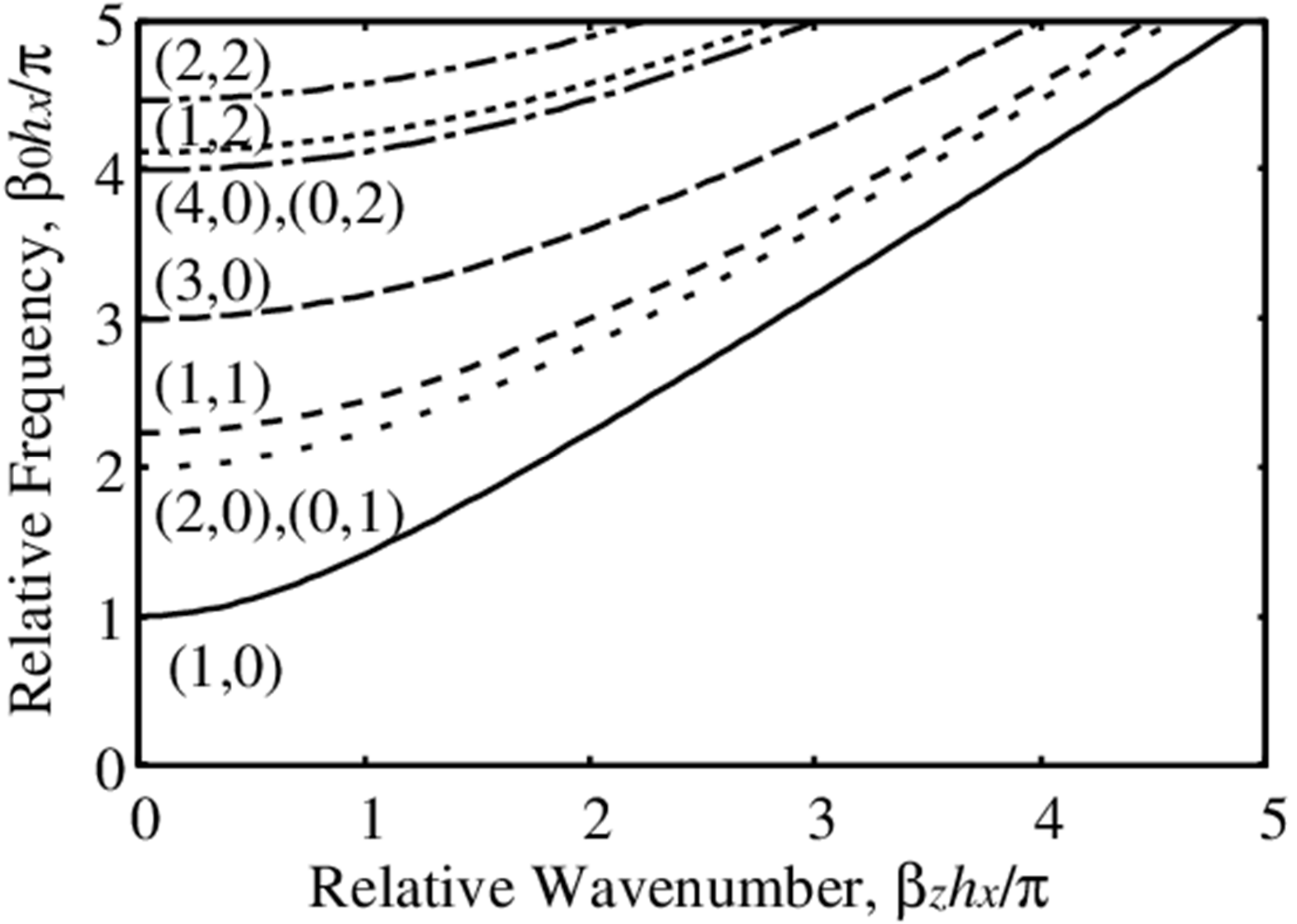
$$\beta_x w_x = n_x \pi$$

$$\beta_y w_y = n_y \pi$$

⇒ 伝搬モードの波数(=2π/λ_z)

$$\beta_z = \sqrt{\beta_0^2 - (n_x \pi / w_x)^2 - (n_y \pi / w_y)^2}$$

w_x:w_y=2:1の時の分散特性



(n_x, n_y)=(2,0)と(0,1)は同一速度 ⇒ 縮退（無結合）

波動論的解析

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x(y) \\ E_y(y) \\ E_z(y) \end{pmatrix} \exp(-j\beta_z z + j\omega t) \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x(y) \\ H_y(y) \\ H_z(y) \end{pmatrix} \exp(-j\beta_z z + j\omega t)$$

とおけば

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = (\beta_z^2 - \omega^2 \mu\varepsilon) E_x \qquad \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} = (\beta_z^2 - \omega^2 \mu\varepsilon) H_x$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \qquad -\frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z$$

$$-j\beta_z E_x = -j\omega\mu H_y \qquad -j\beta_z H_x = j\omega\varepsilon E_y$$

２種類のモードへの分離

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{TE}} + \mathbf{E}_{\mathrm{TM}} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{\mathrm{TE}} + \mathbf{H}_{\mathrm{TM}}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{TE}} = \begin{pmatrix} E_x(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-j\beta_z z + j\omega t) \qquad \mathbf{H}_{\mathrm{TE}} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y(y) \\ H_z(y) \end{pmatrix} \exp(-j\beta_z z + j\omega t)$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{TM}} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(y) \\ E_z(y) \end{pmatrix} \exp(-j\beta_z z + j\omega t) \qquad \mathbf{H}_{\mathrm{TM}} = \begin{pmatrix} H_x(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-j\beta_z z + j\omega t)$$

TEモードの解析

$$E_x = A_{\mathrm{TE}} \exp(-j\beta_y y) + B_{\mathrm{TE}} \exp(+j\beta_y y)$$

$$H_y = \frac{\beta_z}{\omega\mu}\left[A_{\mathrm{TE}} \exp(-j\beta_y y) + B_{\mathrm{TE}} \exp(+j\beta_y y)\right]$$

$$H_z = \frac{-j}{\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{-\beta_y}{\omega\mu}\left[A_{\mathrm{TE}} \exp(-j\beta_y y) - B_{\mathrm{TE}} \exp(+j\beta_y y)\right]$$

ここで $\beta_y = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - \beta_z^2}$

境界条件： $y=\pm h/2$でE_x, $\cancel{E_z}$, B_yが零

E_xが零であればB_yも零なので、

$$A_{\mathrm{TE}} \exp(\mp j\beta_y h/2) + B_{\mathrm{TE}} \exp(\pm j\beta_y h/2) = 0$$

$\beta_y h = n\pi$ $\Longrightarrow$ 分散関係 $\beta_z = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - (n\pi/h)^2}$

TMモードの解析

$$H_x = A_{\mathrm{TM}} \exp(-j\beta_y y) + B_{\mathrm{TM}} \exp(+j\beta_y y)$$

$$E_y = -\frac{\beta_z}{\omega\varepsilon}\left[A_{\mathrm{TM}} \exp(-j\beta_y y) + B_{\mathrm{TM}} \exp(+j\beta_y y)\right]$$

$$E_z = \frac{j}{\omega\varepsilon}\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\beta_y}{\omega\varepsilon}\left[A_{\mathrm{TM}} \exp(-j\beta_y y) - B_{\mathrm{TM}} \exp(+j\beta_y y)\right]$$

ここで $\beta_y = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - \beta_z^2}$

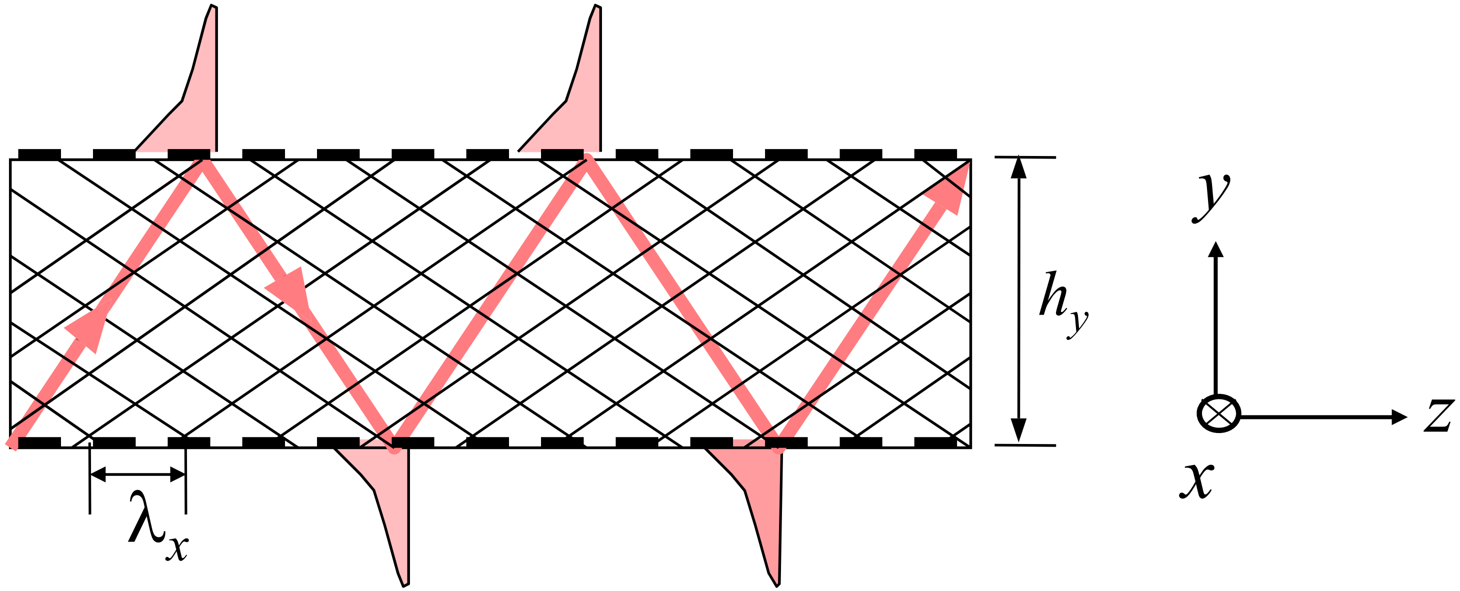
境界条件： $y = \pm h/2$で$\cancel{E_x}$, E_z, $\cancel{B_y}$が零

$$A_{\mathrm{TM}} \exp(\mp j\beta_y h/2) - B_{\mathrm{TM}} \exp(\pm j\beta_y h/2) = 0$$

$\beta_y h = n\pi$ ⟹ 分散関係 $\beta_z = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - (n\pi/h)^2}$

開放導波路

上下面で全反射
＝　外部へのエレルギー染み出し



横共振条件　$\angle(r_{2\to 3} r_{2\to 1}) - 2\beta_{\perp} h = -2n\pi$

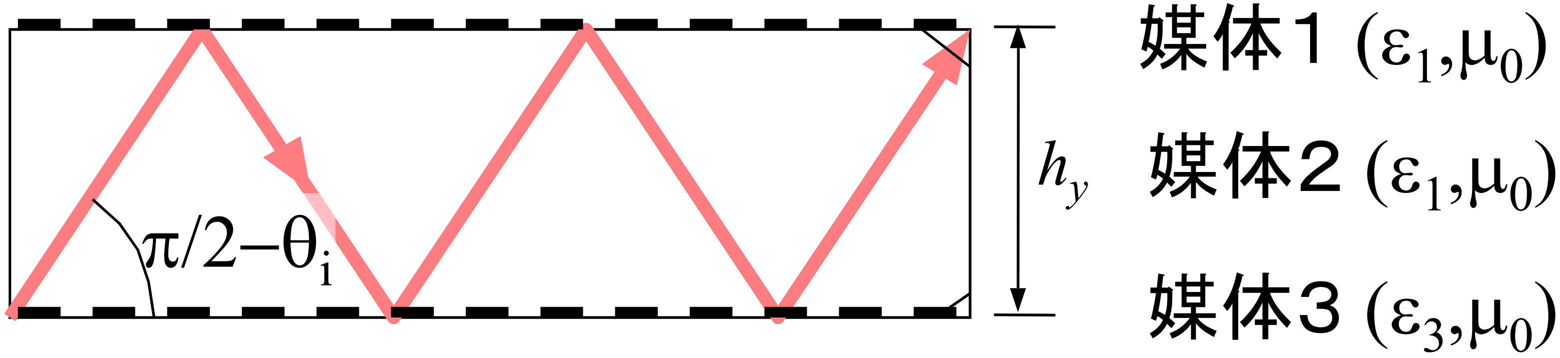
伝搬モードの波数(=2π/λ_x)

$$\beta_x = \sqrt{\beta_0^2 - \left[\left\{\angle(r_{2\to 3} r_{2\to 1})/2 + n\pi\right\}/h\right]^2}$$

$\angle(r_{2\to 3} r_{2\to 1})$ は
周波数依存

全てが誘電体の場合

$$\beta_x = \beta_0 \sin\theta_{\mathrm{i}} \qquad \cos\theta_{\mathrm{t}} = -j\sqrt{\left(z_i z_2^{-1}\sin\theta_{\mathrm{i}}\right)^2 - 1}$$



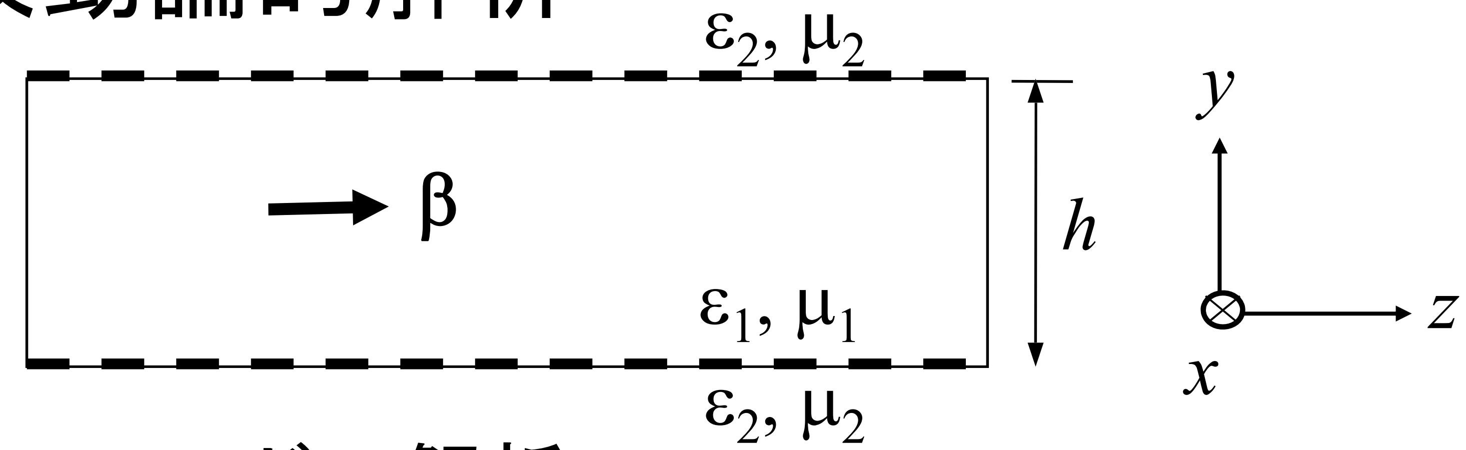
$\mathbf{E}_{//}$成分入射(p偏光)の場合

$$r_{\mathrm{E}2\to n} = \frac{z_n z_2^{-1} - \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}{z_n z_2^{-1} + \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}$$

$\mathbf{H}_{//}$成分入射(s偏光)の場合

$$r_{\mathrm{H}2\to i} = \frac{z_2 z_n^{-1} - \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}{z_2 z_n^{-1} + \cos\theta_{\mathrm{t}} / \cos\theta_{\mathrm{i}}}$$

波動論的解析



TEモードの解析

$$
E_x = \begin{cases} B_{\mathrm{TE+}} \exp(-\alpha_y y) + \cancel{B_{\mathrm{TE-}} \exp(+j\alpha_y y)} & y \geq +h/2 \\ A_{\mathrm{TE+}} \exp(-j\beta_y y) + A_{\mathrm{TE-}} \exp(+j\beta_y y) & -h/2 \leq y \leq +h/2 \\ \cancel{C_{\mathrm{TE+}} \exp(-\alpha_y y)} + C_{\mathrm{TE-}} \exp(+\alpha_y y) & y \leq -h/2 \end{cases}
$$

放射条件；無限遠方でE_x=0

ここで $\beta_y = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \beta_z^2}$ $\quad \alpha_y = \sqrt{\beta_z^2 - \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2}$

$$
\omega\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} < \beta_z < \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}
$$

境界条件：$y=\pm h/2$でE_x, $\cancel{D_y}$, $\cancel{E_z}$, $\cancel{H_x}$, H_z, B_yが連続

$$H_z = \frac{-j}{\omega\mu_m}\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

E_xが連続であれば、B_y も連続であるから

$$B_y = \frac{\beta_z}{\omega} E_x$$

$$B_{\mathrm{TE+}} \exp(-\alpha_y h/2) = A_{\mathrm{TE+}} \exp(-j\beta_y h/2) + A_{\mathrm{TE-}} \exp(j\beta_y h/2)$$

$$C_{\mathrm{TE-}} \exp(-\alpha_y h/2) = A_{\mathrm{TE+}} \exp(j\beta_y h/2) + A_{\mathrm{TE-}} \exp(-j\beta_y h/2)$$

$$-j\frac{\mu_1\alpha_y}{\mu_2\beta_y} B_{\mathrm{TE+}} \exp(-\alpha_y h/2) = A_{\mathrm{TE+}} \exp(-j\beta_y h/2) - A_{\mathrm{TE-}} \exp(j\beta_y h/2)$$

$$j\frac{\mu_1\alpha_y}{\mu_2\beta_y} C_{\mathrm{TE-}} \exp(-\alpha_y h/2) = A_{\mathrm{TE+}} \exp(j\beta_y h/2) - A_{\mathrm{TE-}} \exp(-j\beta_y h/2)$$

$$0=\left(1+j\frac{\mu_1\alpha_y}{\mu_2\beta_y}\right)A_{\mathrm{TE+}}\exp(-j\beta_y h/2)-\left(1-j\frac{\mu_1\alpha_y}{\mu_2\beta_y}\right)A_{\mathrm{TE-}}\exp(j\beta_y h/2)$$

$$0=\left(1-j\frac{\mu_1\alpha_y}{\mu_2\beta_y}\right)A_{\mathrm{TE+}}\exp(j\beta_y h/2)-\left(1+j\frac{\mu_1\alpha_y}{\mu_2\beta_y}\right)A_{\mathrm{TE-}}\exp(-j\beta_y h/2)$$

分散関係

$$\frac{2\mu_1\mu_2\alpha_y\beta_y}{\mu_2^2\beta_y^2-\mu_1^2\alpha_y^2}=\tan(\beta_y h)$$

変形すると

$$\omega h=\frac{\beta_y h}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2}}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\cot^2(\beta_y h)+1}-\cot(\beta_y h)}{\mu_1/\mu_2}\right)^2+1}$$

$$\beta_z=\sqrt{\omega^2\varepsilon_1\mu_1-\beta_y^2}$$

TMモードの解析

$$H_x = \begin{cases} B_{\mathrm{TM+}} \exp(-\alpha_y y) + \cancel{B_{\mathrm{TM-}} \exp(+j\alpha_y y)} & y \geq +h/2 \\ A_{\mathrm{TM+}} \exp(-j\beta_y y) + A_{\mathrm{TM-}} \exp(+j\beta_y y) & -h/2 \leq y \leq +h/2 \\ \cancel{C_{\mathrm{TM+}} \exp(-\alpha_y y)} + C_{\mathrm{TM-}} \exp(+\alpha_y y) & y \leq -h/2 \end{cases}$$

放射条件；無限遠方でH_x=0

ここで $\beta_y = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \beta_z^2}$ $\alpha_y = \sqrt{\beta_z^2 - \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2}$

$$\omega\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} < \beta_z < \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$$

境界条件：$y=\pm h/2$で$\cancel{E_x}$, D_{y}, E_z, H_x, $\cancel{H_{\mathrm{z}}}$, $\cancel{B_y}$が連続

$$D_y = -\frac{\beta_z}{\omega} H_x$$

H_xが連続であれば、D_yも連続であるから

$$E_z = \frac{j}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$B_{\mathrm{TM+}}\exp(-\alpha_y h/2) = A_{\mathrm{TM+}}\exp(-j\beta_y h/2) + A_{\mathrm{TM-}}\exp(j\beta_y h/2)$$

$$C_{\mathrm{TM-}}\exp(-\alpha_y h/2) = A_{\mathrm{TM+}}\exp(j\beta_y h/2) + A_{\mathrm{TM-}}\exp(-j\beta_y h/2)$$

$$j\frac{\varepsilon_1\alpha_y}{\varepsilon_2\beta_y}B_{\mathrm{TM+}}\exp(-\alpha_y h/2) = A_{\mathrm{TM+}}\exp(-j\beta_y h/2) - A_{\mathrm{TM-}}\exp(j\beta_y h/2)$$

$$-j\frac{\varepsilon_1\alpha_y}{\varepsilon_2\beta_y}C_{\mathrm{TM-}}\exp(-\alpha_y h/2) = A_{\mathrm{TM+}}\exp(j\beta_y h/2) - A_{\mathrm{TM-}}\exp(-j\beta_y h/2)$$

$$0=\left(1+j\frac{\varepsilon_1\alpha_y}{\varepsilon_2\beta_y}\right)A_{\mathrm{TM+}}\exp(-j\beta_y h/2)-\left(1-j\frac{\varepsilon_1\alpha_y}{\varepsilon_2\beta_y}\right)A_{\mathrm{TM-}}\exp(j\beta_y h/2)$$

$$0=\left(1-j\frac{\varepsilon_1\alpha_y}{\varepsilon_2\beta_y}\right)A_{\mathrm{TM+}}\exp(j\beta_y h/2)-\left(1+j\frac{\varepsilon_1\alpha_y}{\varepsilon_2\beta_y}\right)A_{\mathrm{TM-}}\exp(-j\beta_y h/2)$$

分散関係

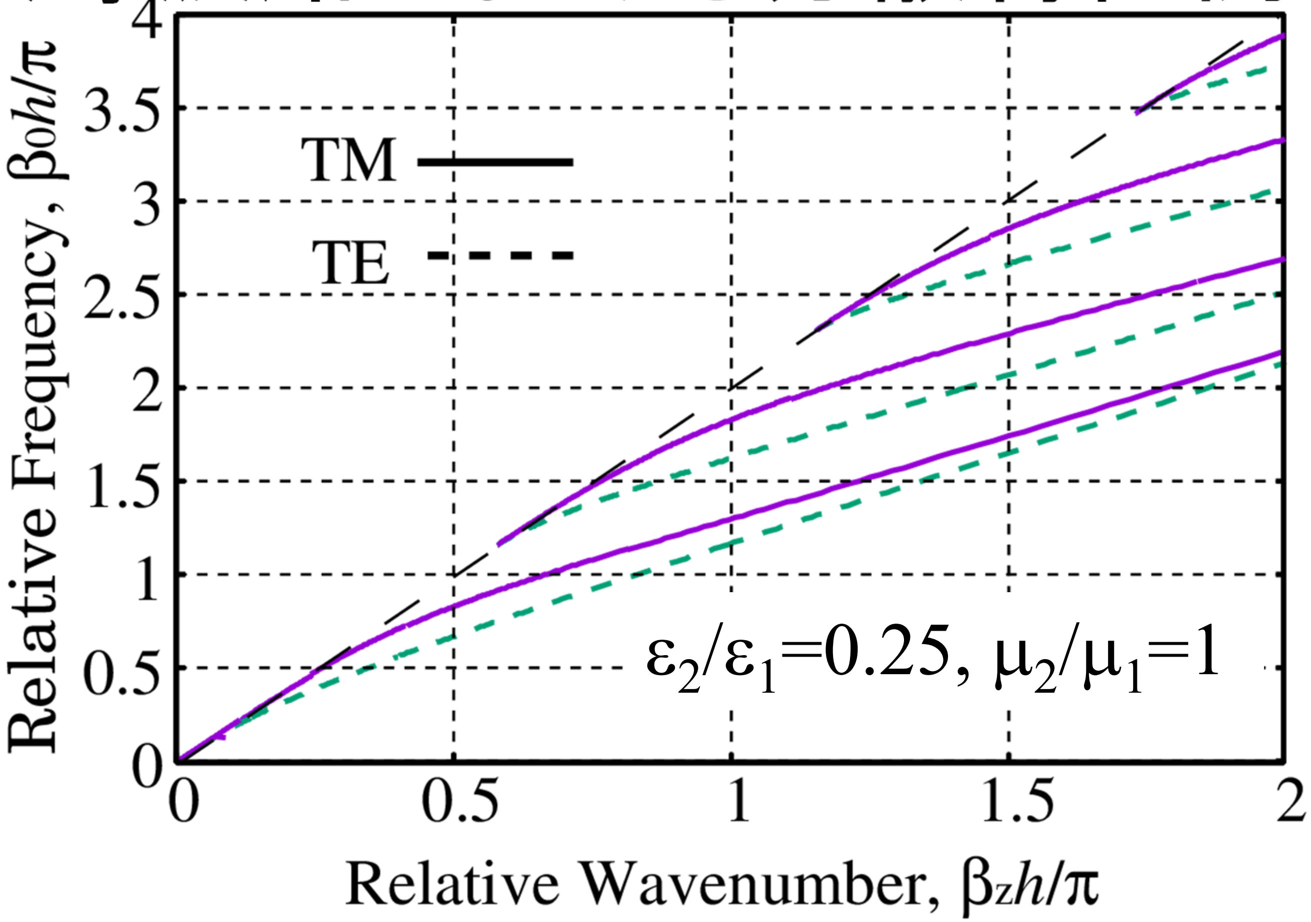
$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_y\beta_y}{\varepsilon_2^2\beta_y^2-\varepsilon_1^2\alpha_y^2}=\tan(\beta_y h)$$

変形すると

$$\omega h=\frac{\beta_y h}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2}}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\cot^2(\beta_y h)+4}-\cot(\beta_y h)}{2\varepsilon_1/\varepsilon_2}\right)^2+1}$$

$$\beta_z=\sqrt{\omega^2\varepsilon_1\mu_1-\beta_y^2}$$

開放導波路における分散特性例



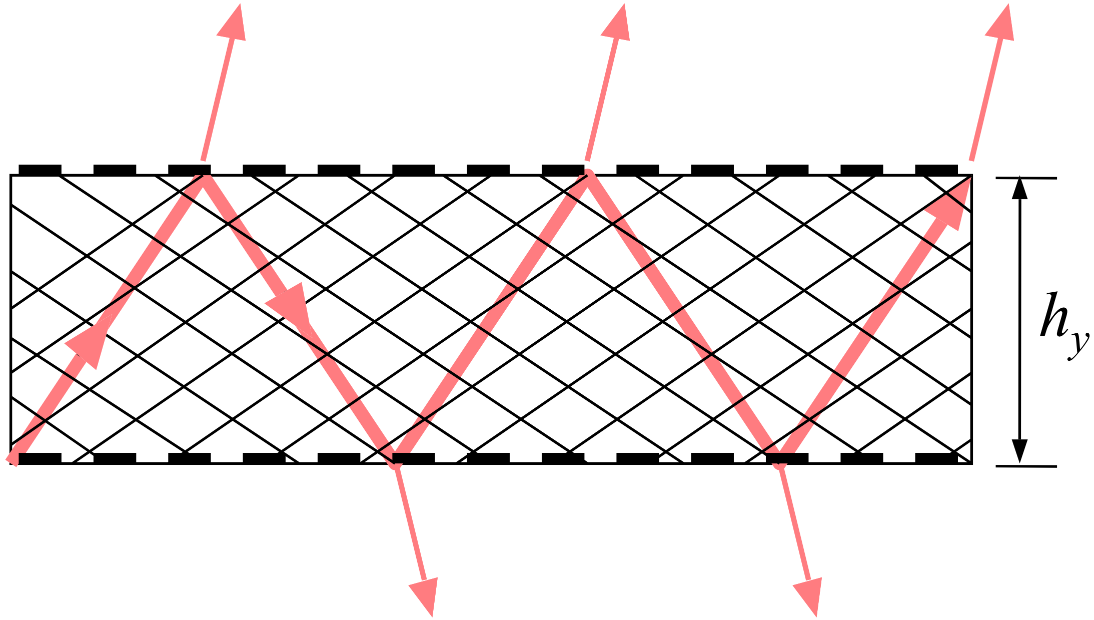
$$\begin{cases}\beta_y h = \pi \\ \boxed{\alpha_y = 0}\end{cases}$$ の時遮断 ⇒

$$\beta_z = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - (n\pi/h)^2}$$

$$\omega\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} = n\pi/h$$

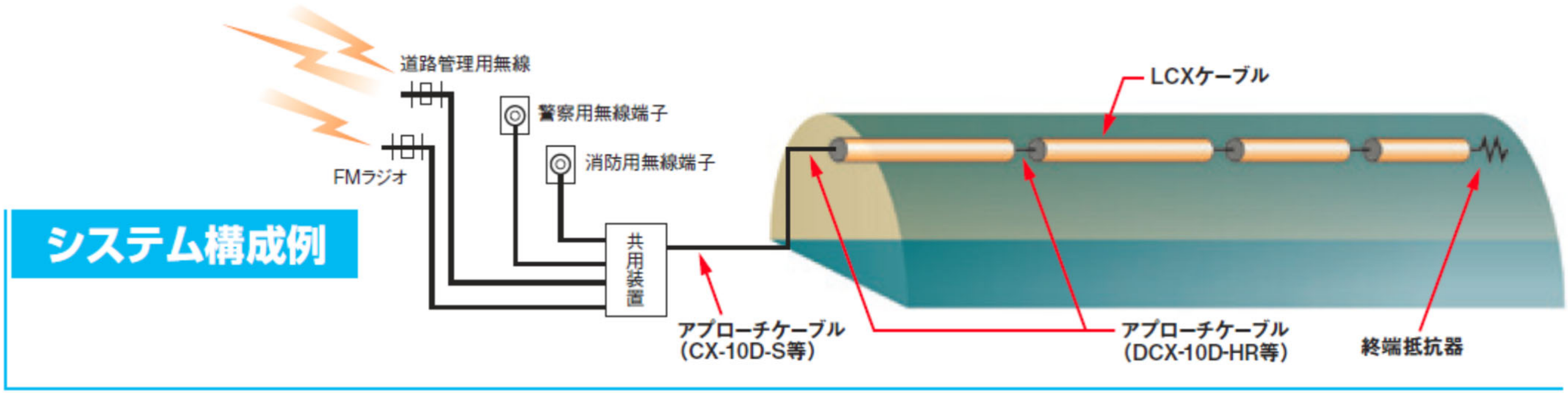
全反射の限界

漏洩導波路

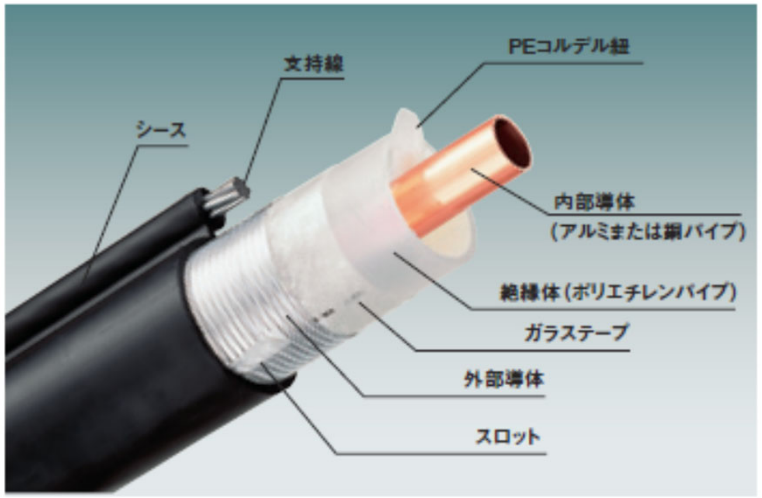


反射係数が大きければ、エネルギーを外に漏らしながら伝搬

漏洩同軸ケーブルを利用したトンネル内異動通信の例



漏洩同軸ケーブル



http://www.swcc.co.jp/cs/products/catalog/pdf/lcx.pdf