

千葉大学 大学院 工学研究科 博士前期課程
人工システム科学専攻 電気電子系コース

入学試験問題例題集

注意：本コースの改組前の例題集です

2008年5月1日初版
2010年5月1日改訂

この小冊子は過去の出題問題を参考にまとめ直したものです。

数学

問題 1. 次の設問に答えなさい。

- (1) 陰関数で表された曲線 $x^3 + y^3 - 4xy = 0$ 上の点 $(2,2)$ における接線の方程式を求めなさい。
- (2) 次の曲線の長さを求めなさい。

$$x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

- (3) 次の写像のヤコビ行列を求めなさい。

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^y + \cos y \\ x \\ x + e^y \end{pmatrix}$$

問題 2. 次の式を計算しなさい。

- (1) $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{x}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} \right)$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{2}{3}} \left\{ (x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right\}$

問題 3. 次の積分に関する問いに答えなさい。

- (1) $f(x) = f(a-x)$ のとき, 次の式を証明しなさい。

$$\int_0^a f(x) dx = s \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx$$

- (2) $f(x)$ を次のような関数とする。

$$f(x-a) = \begin{cases} 0 & \left(|x-a| > \frac{h}{2} \right) \\ \frac{1}{h} & \left(|x-a| \leq \frac{h}{2} \right) \end{cases}$$

ただし, $h > 0, a > 0$ 。

このとき, $b > \frac{h}{2} + a$ とした場合,

$$\int_{-b}^b f(x-a) dx$$

を求めなさい。

- (3) 次に示す式の値として適当なものを, 下の (i)~(iv) の選択肢の中から選びなさい。ただし, $f(x)$ は (2) で定義したものの, $g(x)$ は任意の関数とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x-a)dx$$

- (i) 1 (ii) 0 (iii) $g(a)$ (iv) $\frac{1}{h}$

- (4) (2) の $f(x)$ と同じ性質を持つ超関数としてデルタ関数 $\delta(x)$ がフーリエ解析でしばしば用いられる。 $c < a < b$ のとき,

$$\int_c^b g(x) \frac{d}{dx} \delta(x-a) dx$$

を求め, さらに

$$\int_c^b g(x) \frac{d^n}{dx^n} \delta(x-a) dx$$

を求めなさい。

問題 4. 次の積分についての設問に答えなさい。

- (1) 極座標を用いて, 次の積分を求めなさい。

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$$

ただし, $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$, すなわち D は x - y 平面の第 1 象限とします。

- (2) 設問 (1) の結果を用いて, 次の積分を求めなさい。

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

- (3) 設問 (2) の結果を用いて,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

を求めなさい。

ただし, $\Gamma(s)$ は次のように定義されるガンマ関数である。

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{s-1} dy \quad (s > 0)$$

問題 5. 次の式を積分形に変換し, 極限值を求めなさい。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}$$

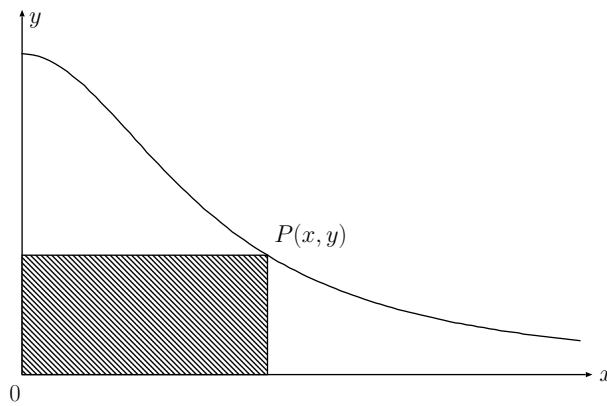
$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}$$

問題 6. 以下の設問に答えなさい。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ を示しなさい。}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \text{ を計算しなさい。}$$

(3) $x \geq 0$ とする。下図に示す曲線 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 上の点 $P(x, y)$ と原点が作る長方形の面積が最大となるように点 $P(x, y)$ を決めなさい。また、そのときの長方形の面積も計算しなさい。



問題 7. 次の行列 A について以下の設問に答えなさい。結果だけでなく、導く過程も記述しなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 3 & -3 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値 λ の 1 つが 1 であることがわかっているとき、 a の値を求めなさい。

(2) 上の (1) の条件が成り立っているとき、 A の残りの固有値をすべて求めなさい。

問題 8. 次の連立方程式について考える。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 13 \end{cases}$$

この連立方程式を行列を用いて表記するために、次のような行列を定義する。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

すると連立方程式は次のように表記できる。

$$Ax = y$$

この連立方程式および行列に関して以下の問いに答えなさい。すべての問いについて、結果だけでなく導く過程も記述すること。

- (1) 行列式 $D = |A|$ を求めなさい。
- (2) ガウス消去法を用いて連立方程式の解を求めなさい。
- (3) ガウス-ジョルダン消去法を用いて逆行列 A^{-1} を求めなさい。
- (4) 連立方程式の右辺に対応する y が次のものだったとする。

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

このとき連立方程式の一般解を求めなさい。

問題 9. 次の行列 A について以下の設問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を求めなさい。
- (2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を正規化したベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ を求めなさい。
- (3) 行列 A と直交行列 P によって、行列 $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ とするとき、 B が対角行列となるような直交行列 P とそのときの B を求めなさい。
- (4) 行列 A^k の各要素を k の式で表しなさい。

問題 10. 線形変換に関する以下の設問に答えなさい。ただし、ここでは xy 平面をベクトル空間とみなし、基底を

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

としたものに限定する。

- (1) x 軸に関する対称移動を与える線形変換の行列を示しなさい。
- (2) 直線 $y = ax$ に関する対称移動を与える線形変換の行列を求めなさい。
- (3) 行列が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

である線形変換 f によって直線 $2x - y = 1$ はどのような図形に写されるかを求めなさい。

問題 11. 下に示す 4 つのベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ について、以下の設問に答えなさい。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (1) ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が線形独立であることを示しなさい。
- (2) ベクトル \mathbf{a}_4 をベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の線形結合で表しなさい。
- (3) ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ から正規直交化したベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ を求めなさい。

問題 12. 次の設問に答えなさい。結果だけでなく、導く過程も記述しなさい。

- (1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい。

$$\frac{dy}{dx} \cos y - \cos x + e^x = 0$$

- (2) 次の微分方程式の一般解を求めなさい。

$$x + ye^{\frac{y}{x}} - xe^{\frac{y}{x}} \frac{dy}{dx} = 0$$

問題 13. 次の設問に答えなさい。

- (1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい。

$$\frac{dy}{dx} = e^x + y$$

- (2) 次の微分方程式について、下の設問に答えなさい。

- (a) この微分方程式で、 $\frac{y}{x} = t$ とおき、 $\frac{dt}{dx}$ を t と x の関数で表しなさい。
- (b) 上の設問の結果を利用して、この微分方程式を解きなさい。

問題 14. 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 2y \tan x - \sin x + \cos^2 x = 0$$

について、以下の設問に答えなさい。

- (1) $\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = 0$ の一般解を求めなさい。
- (2) 設問 (1) の結果を用いて、この微分方程式の一般解を求めなさい。

問題 15. 次の微分方程式に関する設問に答えなさい。

(1) x および y は t の関数で、次の連立微分方程式を満たしている。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\lambda y \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x\end{aligned}$$

ただし、 λ は正の定数である。以下の問に答えなさい。

(a) $t=0$ で $(x, y) = (1, 2)$ のとき、 x, y をそれぞれ t の式で表しなさい。

(b) このとき、グラフ $\{(x(t), y(t)) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$ の方程式を求め、 xy 平面上に描きなさい。

(2) 次の微分方程式

$$f'(y)y' + p(x)f(y) = q(x)$$

は $f(y) = u$ の変換で線形となることを示しなさい。また、これを利用して

$$3y^2y' + y^3 = x - 1$$

を解きなさい。

問題 16. 連立常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} + 2x - 3y &= e^t \\ \frac{dy}{dt} - 3x + 2y &= e^{2t}\end{aligned}$$

について、以下の設問に答えなさい。

(1) この連立常微分方程式より x に関する 2 階の非同次常微分方程式を求めなさい。

(2) (1) で求めた微分方程式を解き、 x の一般解を求めなさい。

(3) (2) の結果を用いて、 y の一般解を求めなさい。

問題 17. フーリエ級数展開

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right\}$$

について以下の設問に答えなさい。

(1) 以下に示す周期 2π の関数 $f(t)$ を図示しなさい。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq t < 0) \\ t & (0 \leq t \leq \pi) \end{cases}$$

(2) 上の (1) の関数 $f(t)$ に対する a_0, a_n, b_n を求め、フーリエ級数で表しなさい。結果だけでなく、導く過程も記述しなさい。

問題 18. フーリエ級数展開

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T}t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T}t \right)$$

について、以下の設問に答えなさい。

- (1) 以下に示す周期 π の関数 $f(t)$ に対する係数 a_0, a_n, b_n を求め、フーリエ級数で表しなさい。

$$f(t) = |\sin t|$$

- (2) 設問 (1) の結果を用いて、以下に示す周期 2π の関数 $f(t)$ に対する係数 a_0, a_n, b_n を求め、フーリエ級数で表しなさい。

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & (0 \leq t < \pi) \\ 0 & (-\pi \leq t < 0) \end{cases}$$

- (3) 設問 (2) の結果を用いて、次式が成り立つことを証明しなさい。

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

問題 19. フーリエ級数展開

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right) \quad (1)$$

について以下の設問に答えなさい。

1. 以下に示す周期 2π の関数 $f(t)$ に対する係数 a_0, a_n, b_n を求め、フーリエ級数で示しなさい (導出過程と結果を解答すること)。

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < t < 0) \\ 1 & (0 < t < \pi) \end{cases} \quad (2)$$

2. $0 < n < 6$ までの係数それぞれに対し、 $-\pi$ から π の区間での $f(t)$ (式 (2)), およびフーリエ級数展開で導出された $f(t)$ を描画しなさい。その際、 y 軸 t 軸の数値およびそれぞれの曲線がどの係数項の和であるかを明記しなさい。

さらに n を増やしていった際に、フーリエ級数展開曲線と実際の関数の間にどのような特徴が見られるのか、 $t = 0$ 近傍、あるいは $-\pi, \pi$ 近傍に着目し簡潔に記載しなさい。

3. 以下に示す区分的に連続な周期 2π の関数 $f(t)$ に対する係数 a_0, a_n, b_n を示し、フーリエ級数で表しなさい (導出過程と結果を解答すること)。

$$f(t) = |t| \quad (-\pi < t < \pi) \quad (3)$$

問題 20. 下に示す周期 2π の区分的に連続な関数 $f(x)$ について、以下の設問に答えなさい。

$$f(x) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

- (1) この関数を区間 $(-\pi, \pi)$ でフーリエ級数展開したときの係数 a_0, a_n, b_n をそれぞれ求めなさい。ただし $f(x)$ のフーリエ級数展開は次のように定義します。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- (2) 上の結果を用いて次式が成り立つことを証明しなさい。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

物理

問題 1. 次の文章の空白 に適切な式あるいは数字を書きなさい。

図に示すように、質量 m の質点が角度 θ の斜面上を重力加速度 g を受けて運動する。質点と斜面の間の静止摩擦係数を μ_S 、動摩擦係数を μ_K とし、斜面に沿って下向きに x 座標を取り、斜面の頂上で $x = 0$ とする。また、図のように、斜面の水平方向の距離を L とする

質点が斜面上で静止している時、物体に加わる斜面方向の力の大きさは、重力について

$$F_A = \text{ } \quad (\text{A})$$

摩擦による力についても

$$F_F = \text{ } \quad (\text{A})$$

である、同 θ と静止摩擦係数 μ_S の間には、

$$\mu_S > \text{ } \quad (\text{B})$$

の関係がある。

質点が斜面上で移動しているとき、摩擦による力の大きさは

$$F_F = \text{ } \quad (\text{C})$$

となり、このときの斜面方向の運動方程式を

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

とすると、 F は m 、 g 、 θ および μ_K を用いて

$F = \text{ } \quad (\text{D})$ 時間 $t = 0$ で質点の速度が $v = v_0$ 、位置が $x = 0$ である時、時間 t における物体の速度と位置は、それぞれ、 m 、 t 、 v_0 および a (ただし、 $a = F/m$) を用いて

$$v(t) = \text{ } \quad (\text{E})$$

$$x(t) = \text{ } \quad (\text{F})$$

となる

斜面が滑らかに半径 R の円形曲面とつながっている時、質点は斜面と円形曲面とのつなぎ目で斜面から離れて射出される場合がある。斜面と曲面のつなぎ目の速度について、射出可能な速度の最小値を v_L とすると、 v_L 、 g 、 R および θ の間には

$$v_L = \text{ } \quad (\text{G})$$

の条件がある。質点が射出可能となる水平距離 L の条件は、 v_L 、 v_0 、 θ 、 α を用いて

$$L > \text{ } \quad (\text{H})$$

と表される。特に $\mu_K = 0$ および $v_0 = 0$ の時、この条件は R と θ だけの条件

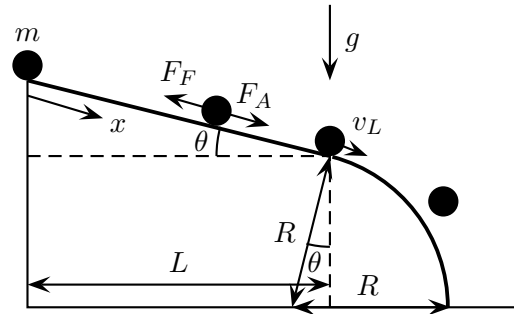
$$L > \text{ } \quad (\text{I})$$

となる。

問題 2. 次の文章の に適切な式を入れなさい。(4) は語句を選択しなさい。

図のように、質量 M の一様な剛体でできている振り子 (物理振り子) があり、その重心を G とする。重心から距離 x だけ離れた点 O を通り紙面に垂直な軸を固定軸として振り子を振動させる。

時間 $t = 0$ において角度 $\theta = \theta_0$ から角速度 $d\theta/dt = 0$ で振り始めるとき、振り子の周期 T は振り子の固定軸の位置によって変化する。周期 T を最小にする x の値を求めたい。なお、重力加速度の大きさは g とする。



重心 G を通り固定軸に平行な軸についての慣性モーメントを I_G とするとき、 O を通る固定軸についての慣性モーメント I_O は、

$$I_O = \boxed{} \quad (1)$$

である。これを用いて求めた振り子の運動方程式から $d^2\theta/dt^2$ を求めると、次式 (i) が得られる。ここで、慣性モーメントは I_O もしくは I_G を用いなさい。

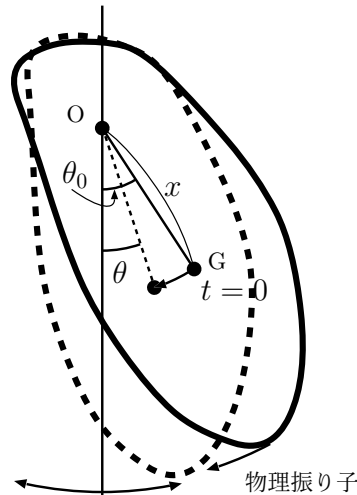
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \boxed{} \dots\dots (i)$$

式 (i) の両辺に $d\theta/dt$ をかけて、与えられた初期条件のもとで積分すると、左辺は $(1/2)(d\theta/dt)^2$ となり、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \boxed{} \dots\dots (ii)$$

が求まる。

周期 T が最小になるのは、角速度の大きさ $d\theta/dt$ を $\boxed{}$ (4) (最大, 最小) にするときであるから、式 (ii) を用いて、周期を最小にする x の値、 $x = \boxed{}$ (5) を求めることができる。



図

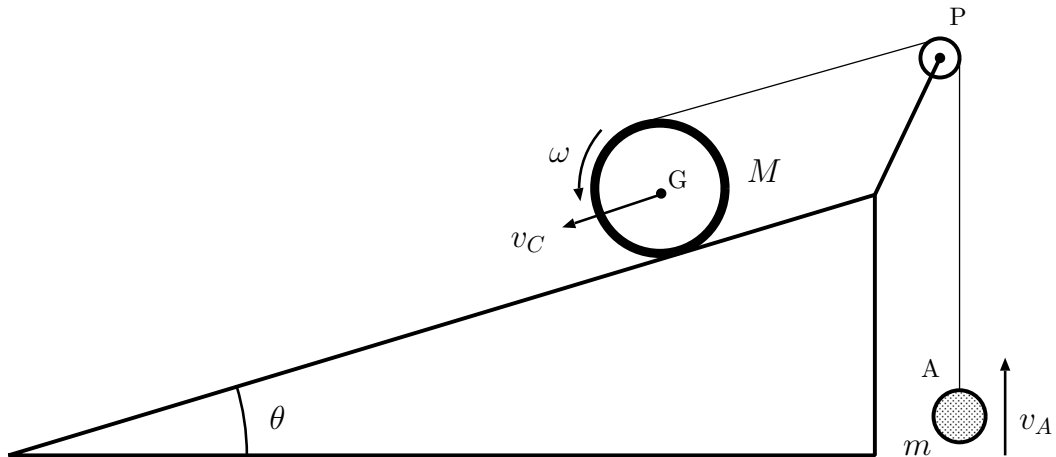
問題 3. 水平面と角度 θ をなす斜面上に半径 a 、質量 M の一様な円柱を図のように置く。円柱に糸を巻きつけ、糸の他端を斜面に平行に引いて滑車 P につけ、その先に質量 m の物体 A をつるす。円柱がころがり運動をするとき、時間 t における円柱の角速度を ω とし、物体 A の速度を v_A とする。このときの物体の運動について、以下の問いに答えなさい。

なお、糸に伸び縮みはなく、その質量は考えない。また、重力加速度の大きさは g とする。

- (1) 糸に働く張力を T として、物体 A についての運動方程式を v_A を含む式で求めなさい。
- (2) 円柱の重心 G の斜面に沿った速さを v_C として、重心の運動方程式を v_C を含む式で求めなさい。ここで、円柱と斜面の間に働く摩擦力を F とする。
- (3) 円柱の重心まわりの慣性モーメントが $Ma^2/2$ であることを用いて、円柱の重心まわりの回転運動の方程式を求めなさい。
- (4) 円柱の速度 v_C を円柱の回転の角速度 ω を使って表しなさい。
- (5) 物体 A の速度 v_A を円柱の回転の角速度 ω を使って表しなさい。

(6) 糸に働く張力 T を a, M, θ, g および $d\omega/dt$ を用いた式で表しなさい。

(7) 物体 A の加速度 dv_A/dt を求めなさい。



図

問題 4. 図 1 のように、傾斜角 φ の滑らかな斜面上の点 O から初速度 \vec{v}_0 (大きさ v_0) で斜面に沿って投射された質量 m の質点について、その後の運動を求めたい。いま、始点 O を原点とし、斜面の最大傾斜線に沿って下向きに x 軸を、斜面と水平面との交線に沿って y 軸を、斜面の法線方向に z 軸をとる。質点の運動を以下の手順で求めることとし、文中の空欄 (1)~(14) に、適当な数式を入れなさい。なお、重力加速度を \vec{g} とし、その大きさを g とする。

質点に働く力は鉛直下向きの重力 \vec{W} と、斜面に垂直な法線抗力 \vec{N} であるから、質点の運動方程式は、ベクトル表現で、

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{W} + \vec{N} \quad (\text{i})$$

と書ける。ここで t は時間を表す。また、 \vec{r} は位置ベクトルであり、 $\vec{r} = (x, y, z)$ と表す。重力を $\vec{W} = (W_x, W_y, W_z)$ と表すと各成分は、

$$W_x = \boxed{\quad (1) \quad}, \quad W_y = \boxed{\quad (2) \quad}, \quad W_z = \boxed{\quad (3) \quad}$$

と書ける。一方、法線抗力 \vec{N} は、その大きさを N とすると $\vec{N} = (0, 0, N)$ と書ける。以上の力を考慮して、式 (i) を x, y, z の成分ごとに書けば、

$$x \text{ 成分: } \boxed{\quad (4) \quad} \quad (\text{ii-a})$$

$$y \text{ 成分: } \boxed{\quad (5) \quad} \quad (\text{ii-b})$$

$$z \text{ 成分: } \boxed{\quad (6) \quad} \quad (\text{ii-c})$$

となる。実際には、斜面上に運動が拘束されていることが既知であるから、 xy 面内の運動のみを調べれば十分である。

質点を点 O から投げた時刻を時間の原点にとり、初速度が y 軸となす角を θ とすれば、初期条件は、

$$x(0) = \boxed{\quad (7) \quad} \quad (\text{iii-a})$$

$$y(0) = \boxed{\quad (8) \quad} \quad (\text{iii-b})$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = \boxed{\quad (9) \quad} \quad (\text{iii-c})$$

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=0} = \boxed{\quad (10) \quad} \quad (\text{iii-d})$$

式 (ii-a), (ii-b) を 1 回積分して積分定数を式 (iii-c), (iii-d) が満たされるように定めると,

$$\frac{dx}{dt} = \boxed{\hspace{2cm}} \quad (11) \quad (\text{iv-a})$$

$$\frac{dy}{dt} = \boxed{\hspace{2cm}} \quad (12) \quad (\text{iv-b})$$

これらをもう一度積分して, その際の積分定数を式 (iii-a), (iii-b) が満たされるように定めると,

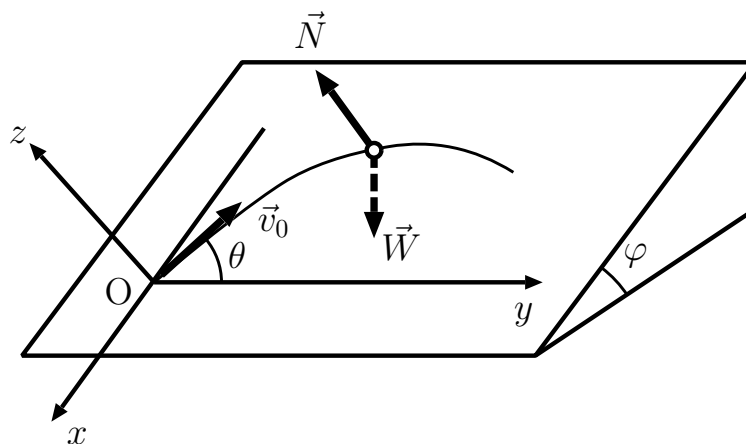
$$x(t) = \boxed{\hspace{2cm}} \quad (13) \quad (\text{v-a})$$

$$y(t) = \boxed{\hspace{2cm}} \quad (14) \quad (\text{v-b})$$

式 (v-a), (v-b) から t を消去すれば, 質点の軌道として放物線

$$x = \frac{g \sin \varphi}{2v_0^2 \cos^2 \theta} y^2 - \tan \theta y \quad (\text{vi})$$

を得る。



問題 5. 図 1 のように, 質量 M_1 のエレベータに質量 M_2 の人が乗っており, またエレベータの天井から, 質量 M_3 の物体がロープでつり下がっている。物体はエレベータの床から上方, 距離 S のところにある。エレベータは一定の力 F で上向きの加速度を受けている。以下の設問に答えなさい。ただし, 重力加速度を g とし, 物体の大きさを無視する。答案には結果だけではなく, 計算の途中過程も示しなさい。

問 1. エレベータの加速度 a を求めなさい。

問 2. 質量 M_2 の人がエレベータの床に及ぼす力 R を求めなさい。

問 3. エレベータから物体をつるしているロープに働く張力 T を求めなさい。

問 4. このロープをエレベータに乗っている人がハサミで切った。その直後のエレベータの加速度 a_1 と物体の加速度 a_3 を求めなさい。ただし, ロープとハサミの質量は無視できるほど小さいものとする。

問 5. 物体をつるしたロープが切れてから時間 t 後におけるエレベータの床の高さ方向の位置 h_1 , および物体の高さ方向の位置 h_3 を求めなさい。ただし, ロープが切れた瞬間のエレベータの速度, 床の高さ方向の位置をそれぞれ v_0, h_0 とする。

問 6. 物体がエレベータの床に落ちるまでの時間を求めなさい。

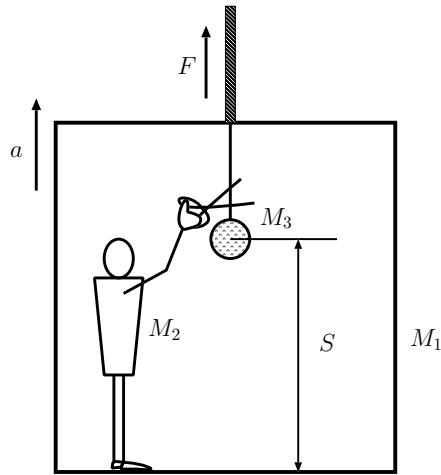


図 1

問題 6. 質量 M , 半径 R の一様な円柱が, 軸を中心として角速度 ω_0 で回転している。図 1 のように, この円柱を水平面上に静かに置く場合について, 以下の設問に答えなさい。ただし, 重力加速度を g , 動摩擦係数を μ , 円柱の慣性モーメントを I とし, 時刻 $t = 0$ において円柱側面上の点 C が水平面に接するものとする。答案には結果だけではなく, 計算の途中課程も示しなさい。

問 1. 円柱を水平面上に静かに置くと円柱はすべり始める。円柱の重心の並進速度を v , 角速度を ω とする。

- (1) 円柱の並進運動に関する運動方程式を求めなさい。
- (2) 円柱の回転運動に関する運動方程式を求めなさい。

問 2. 問 1 で求めた運動方程式を解く。ただし, $I = \frac{1}{2}MR^2$ とする。

- (1) 円柱の重心の並進速度 v を求めなさい。
- (2) 円柱の角速度 ω を求めなさい。

問 3. 水平面と接触する点 C の速度を v_C とするとき, 以下の設問に答えなさい。

- (1) 円柱がすべっているときの v_C を示しなさい。
- (2) 円柱のすべりが止まるまでの時間 t_1 を求めなさい。

問 4. すべりが止まった直後の, 円柱の重心の並進速度 v を示しなさい。

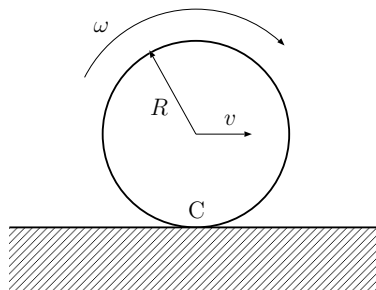


図 1

問題 7.

問 1. 一様な磁束密度 B_z (z 軸方向) のある真空中の領域に, 図 1 のような電極間距離 d で面積 A の平行板電極 (a,b) を配置する。 x 軸方向に速度 v をもつ質量 m , 正電荷 q の荷電粒子が入射した場合について, 以下の設問に答えなさい。ただし, 初期状態で電極間の電圧は 0 とし, 重力は無視する。

- (1) 磁界によって荷電粒子の受ける力 f_B の方向と大きさを求めなさい。
- (2) この荷電粒子の軌道が曲がらず直進するために必要な印加電圧と電極 b の電極 a に対する極性を示しなさい。

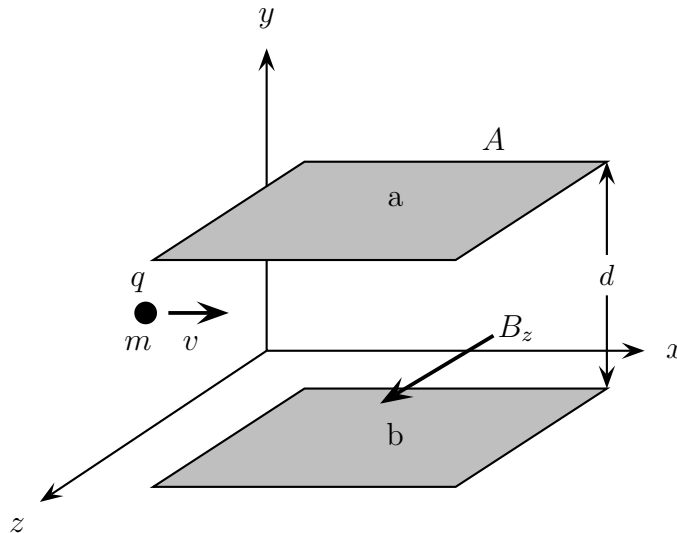


図 1

問 2. 図 2 に示す半径 a_1 の内球と, 内径 b_1 , 外径 b_2 の外球殻とからなる同心球状導体について, 電界と電位を以下の手順で求めたい。以下の空欄 (A) - (F) に適する式を答えなさい。ただし, 導体以外の誘電率はすべて ϵ とし, 無限遠の電位を 0 とする。なお, 初期状態で, 各導体の電荷は 0 とする。

内球, 外球殻にそれぞれ Q_1, Q_2 の正電荷を与えた場合, 外球殻の内面に $-Q_1$, 外面に $Q_1 + Q_2$ の電荷が生じる。外球殻より外側に半径 r ($r > b_2$) の同心球状の仮想面 S を通って外に出て行く電気力線の総数 N は, S 上で電界 E が一定で, かつ半径方向を向くので, ガウスの法則により次式で表される。

$$N = \text{(A)}$$

また, 電界の大きさ $E(r)$ は, 半径 r の表面積を貫く電気力線の密度として表され, 次のように求まる

$$E(r) = \text{(B)}$$

一方, 電界は電位の勾配, すなわち距離 r に対する微分として表されるので, 外導体より外側の電位 $V(r)$ は, 上で求めた電界 E を無限遠から r 点までの積分として求めることができ, 次式となる

$$V(r) = \text{(C)}$$

また, 外導体の電位 $V(b_2)$ は, 次式となる

$$V(b_2) = \text{(D)}$$

次に, ふたつの導体間 ($a_1 < r < b_1$) の電界は内球と外球殻の内面に蓄積された電荷 Q_1 のみによって生じるので, 同様な手順で両導体間の電界の大きさ E_{ab} , 内導体の電位 $V(a_1)$ は

$$E_{ab}(r) = \text{(E)}$$

$$V(a_1) = \text{(F)}$$

となる。

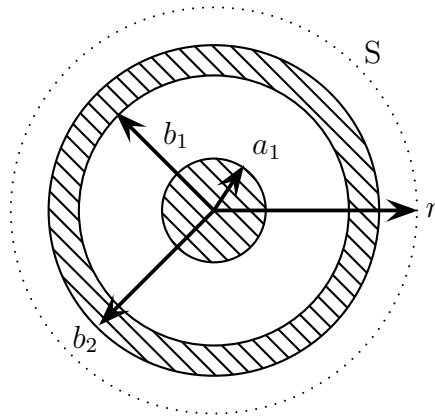


図 2

問題 8. 半径 a の 2 枚の円形平板導体の電極を間隔 d だけ隔てて平行に空气中に配置しコンデンサを構成する (図 1 参照)。この導体間に電位差 V を与える。 $d \ll a$ なので、電界の導体周辺部の乱れは無視できるものとする。また、空気の誘電率は ϵ_0 とする。このとき、以下の設問に答えなさい。

- (1) 平行平板導体間にできる電界の大きさ E を求めなさい。
- (2) 電極に蓄えられる電荷の電気量 Q を求めなさい。
- (3) この平行平板コンデンサの静電容量 C を ϵ_0, a, d を用いて表しなさい。
- (4) このコンデンサに蓄えられている電気エネルギー W を ϵ_0, a, d, V を用いて表しなさい。
- (5) このとき、電極間に働く力の大きさ f を ϵ_0, a, d, V を用いて表しなさい。
- (6) 図 2 に示すように、一方の電極にバネを取り付けて、他方の電極と平行に動くようにした。バネの長さが自然の長さのとき (伸びが 0 のとき)、電極間隔がちょうど d になるように調整されている。電極間に電位差 V を与えたとき、バネの伸び $\Delta l (\ll d)$ を求めなさい。バネ定数は k で、重力の影響は考えなくてもよいものとする。

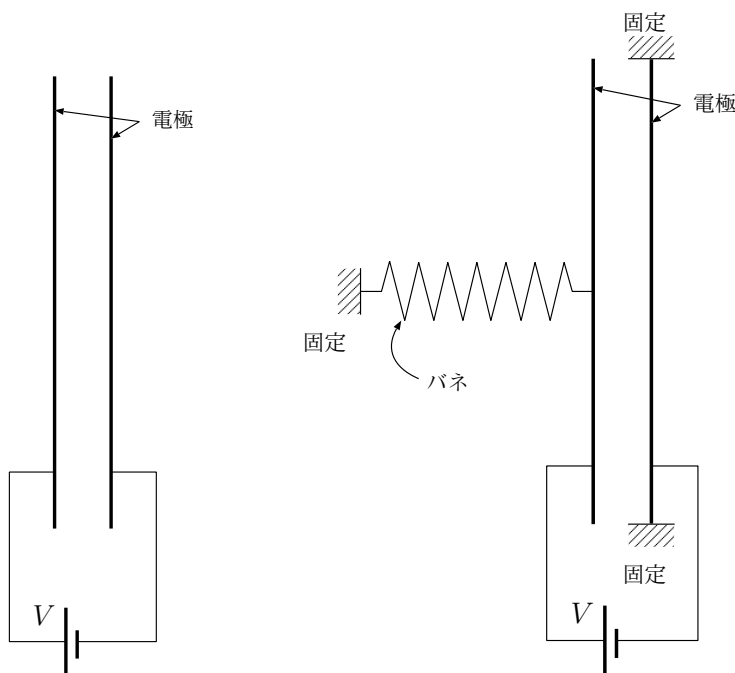
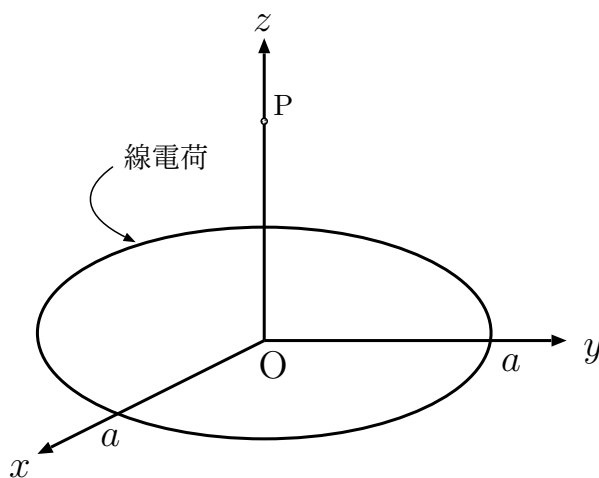


図 1

図 2

問題 9. 下図のように、半径 a の円形をした線電荷が真空中に置かれている。円は x - y 平面上に円の中心が原点 O と一致させてある。線電荷の線電荷密度は一定で全電荷量を q 、真空の誘電率を ϵ_0 とする。このとき、以下の設問に答えなさい。

- (1) z 軸上の点 P における電位を求めなさい。なお、無限遠点における電位を 0 とする。
- (2) 点 P における電界を求めなさい。
- (3) 点電荷 Q を z 軸上の点 P に置いたとき、点電荷が線電荷から受ける力を求めなさい。また、 z 軸上で力が 0 となる位置を求めなさい。
- (4) 点電荷の代わりに電気双極子 p を点 P に置いた。電気双極子は z の正方向に向けて、 z 軸と平行に配置した。このとき、電気双極子が線電荷から受ける力を求めなさい。また、 z 軸上で力が 0 となる位置を求めなさい。



図

問題 10. 以下の文中の空欄 (1)~(10) に、適当な数式または語句を入れなさい。

問 1. 図 1 に示すように、3 枚の平行平板導体 a, b, c がある。導体 a と c は導線で結ばれており、導体 b は外側の導体と絶縁されている。いま、導体 b を $1.00 \times 10^{-4} \text{C/m}^2$ の電荷密度で一様に帯電させたとき、導体 b の上下の面の電荷密度はそれぞれ $\sigma_1 [\text{C/m}^2]$ および $\sigma_2 [\text{C/m}^2]$ となった。導体 a, b, c の対向面の距離をそれぞれ $d_1 [\text{m}]$ および $d_2 [\text{m}]$ 、また誘電率を $\epsilon_0 [\text{F/m}]$ とする。

このとき、導体 a, b 間の空間の電界は、大きさ で、 向きである。一方、導体 b, c 間の空間の電界は、大きさ で、 向きである。題意より、電荷密度 σ_1 と σ_2 の比は $\sigma_1/\sigma_2 =$ となる。また、 $d_1 = 1.00 \text{cm}$ 、 $d_2 = 3.00 \text{cm}$ とすると、 $\sigma_1 =$, $\sigma_2 =$ となる。

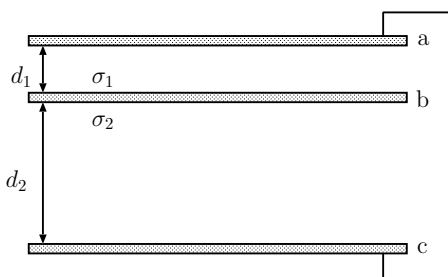


図 1

問2. 図2に示すように、ヘアピン状の細長い導体がある。これに電流 I が流れているとき、任意の点における磁界 \vec{H} は (8) の法則より求められる。いま、半円の中心 P における磁界 \vec{H} を求めれば、その向きは (9) であり、大きさは (10) である。

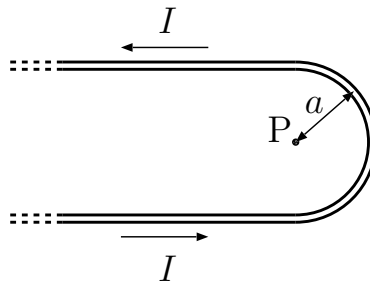


図2

問題11. 次の文章、式中の空欄 [(1)], [(2)], …, [(10)] に、適当な数式または言葉を入れなさい。

大きさが等しく反対符号の2つの点電荷が、電位や電場を求めようとしている点までの距離に比べて十分短い距離に存在するとき、その2つの点電荷を電気双極子という。真空中に原点 O を中心として z 軸上に対称に配置された電気双極子を図1に示す。各電荷は、 $+Q$ 、 $-Q$ とし、電荷間の距離は d とする。遠方の点 P は、極座標で r 、 θ および方位角 $\phi = 90^\circ$ にあるとする。点電荷 $+Q$ 、 $-Q$ から点 P までの距離をそれぞれ R_1 、 R_2 とすると、点 P における電位 V は、無限遠点の電位をゼロ、真空の誘電率を ϵ_0 とした場合、

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\left[\quad (1) \quad \right] \right) \quad (i)$$

となる。これより、2つの点電荷間の中央の $z = 0$ 平面の電荷は、[(2)] であることがわかる。

電気双極子より十分遠い点 ($r \gg d$) に関する議論から話は少しそれるが、2つの点電荷間の中央の $z = 0$ 平面の電位が [(2)] であることは、接地した平面状の導体の前に点電荷 $+Q$ を置いた場合の、導体表面に誘導されている電荷の面密度を求める際に用いられる。このとき、導体のかわりに、点電荷 [(3)] を、点電荷 $+Q$ の位置と導体表面に関して [(4)] となる位置に置くことにより、導体表面における境界条件を満たすことが可能となり、導体表面上の電場や電荷の面密度を求めることができる。

ここで、電気双極子より十分遠い点 ($r \gg d$) に関する議論に話を戻す。電気双極子より十分遠い点では、 r 、 d 、 θ から適切なものを用いて、 $R_1 R_2$ は [(5)] と、 $R_2 - R_1$ は、[(6)] と近似できるから、式 (i) は、

$$V = \left[\quad (7) \quad \right] \quad (ii)$$

と書くことができる。これを用いて点 P における電場ベクトル \vec{E} を計算すると、

$$\vec{E} = \left[\quad (8) \quad \right] \vec{e}_r + \left[\quad (9) \quad \right] \vec{e}_\theta + \left[\quad (10) \quad \right] \vec{e}_\phi \quad (iii)$$

となる。このとき、 \vec{e}_r は、半径 r の球の点 P における球に垂直で外側に向かう単位ベクトル、 \vec{e}_θ は、 $\phi = \text{一定}$ の平面上にあり、 \vec{e}_r と直交し、 θ の増加する方向を持つ単位ベクトル、 \vec{e}_ϕ は、 \vec{e}_r 、 \vec{e}_θ と直交し、 ϕ の増加する方向を持つ単位ベクトルである。

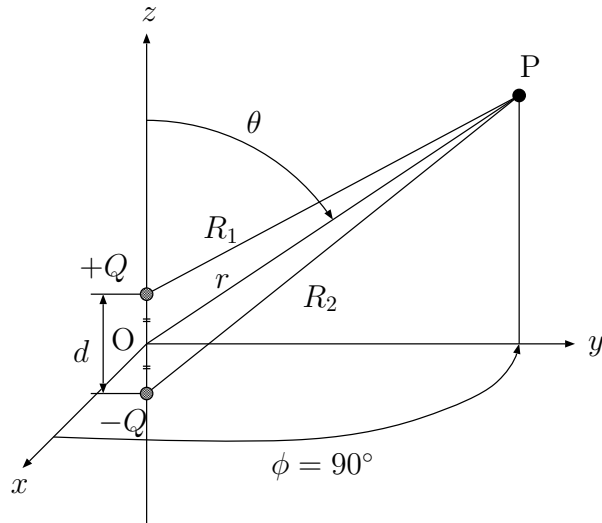


図 1

問題 12. 次の文章中の [] 欄に適切な言葉または単位を, また, () 欄に適切な数値を入れなさい。

MKSA 単位系は, 長さの単位 m(メートル), [1] の単位 kg(キログラム), 時間の単位 s(秒), および [2] の単位 A(アンペア) を基本とする単位系である。静電場は, 時間的に変動しない電荷分布に基づく場であり, スカラー場である [3] によっても記述できる。電場 E の単位としては V/m がよく用いられるが, これを MKSA の基本単位を用いて表すと [4] となる。水素原子の半径を $5.3 \times 10^{-11}m$, 電気素量 (素電荷) を $1.6 \times 10^{-19}C$ とすると, 水素原子中で [5] が電子におよぼしている電場の大きさは約 (6) V/m と見積もられる。一方, 磁場 H の単位としては A/m がよく用いられる。単位長さあたりの巻き数が $1000m^{-1}$ のソレノイドコイルに $100mA$ の電流が流れているとき, ソレノイド中の磁場の大きさは (7) A/m となり, これは磁束密度の大きさとしては約 (8) mT となる。

電磁気学の法則は非常に多岐にわたるが, その基本法則は 4 つの偏微分方程式の組である [9] の方程式の形にまとめられる。その 4 つとは, 電場と [10] の関係を表すガウスの法則, [11] の場の連続性に関するガウスの法則, 電流の周囲に生じる磁場を規定する [12] の法則, そして, 回路を貫く [13] の変化にともなって起電力が生じるという内容のファラデーの [14] の法則である。[9] の方程式を数学的に処理すると, 真空中を伝わる波の方程式が得られる。この波の速さを電磁気学的な定数から求めると, 約 (15) m/s となることがわかる。これが光速に等しいことから, 光が真空中を伝わる電磁波であることが明らかになった。

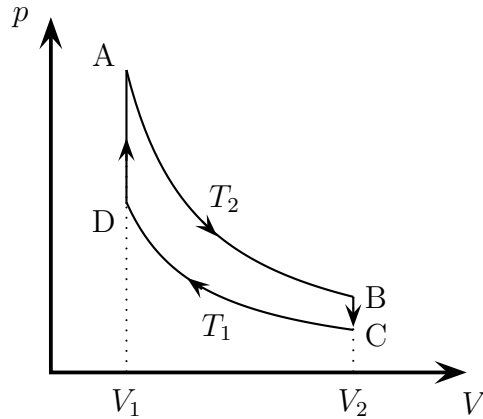
問題 13. 滑らかに動くピストンのついたシリンダー内に入れた 1 mol の理想気体を考える。その圧力 p と体積 V は図のような過程で準静的な変化をくりかえす。過程 $A \rightarrow B$ は温度 T_2 で体積 V_1 から V_2 に等温膨張, 過程 $B \rightarrow C$ は体積 V_2 で温度が T_2 から T_1 に下がる等積変化, 過程 $C \rightarrow D$ は温度 T_1 で体積 V_2 から V_1 にもどる等温圧縮, 過程 $D \rightarrow A$ は体積 V_1 で温度が T_1 から T_2 にもどる等積変化である。気体定数と定積モル比熱をそれぞれ R, C_V とし, C_V は温度によらず一定とする。下記の設問の空欄に適切な数式を入れなさい。ただし, 使用できる記号は $T_1, T_2, V_1, V_2, R, C_V$ のみとする。

- (1) 過程 $A \rightarrow B$ において, 移動する熱量 Q_{AB} , 内部エネルギー変化量 ΔU_{AB} , 仕事 W_{AB} , エントロピー変化量 ΔS_{AB} は, それぞれ $Q_{AB} = \boxed{\text{(A)}}$, $\Delta U_{AB} = \boxed{\text{(B)}}$, $W_{AB} = \boxed{\text{(C)}}$, $\Delta S_{AB} = \boxed{\text{(D)}}$ となる。
- (2) 過程 $B \rightarrow C$ において, 移動する熱量 Q_{BC} と内部エネルギー変化量 ΔU_{BC} , 仕事 W_{BC} , エントロピー変化量 ΔS_{BC} は, それぞれ $Q_{BC} = \boxed{\text{(E)}}$, $\Delta U_{BC} = \boxed{\text{(F)}}$, $W_{BC} =$

(G) , $\Delta S_{BC} =$ (H) となる。

(3) この熱機関が1サイクルで外部にした正味の仕事 W は, $W =$ (I) となる。

(4) 再生熱交換器を過程 $B \rightarrow C$ と過程 $D \rightarrow A$ の間に用いて過程 $B \rightarrow C$ で生じる熱量を 100%過程 $D \rightarrow A$ に移動した場合, この熱機関の効率 η は $\eta =$ (J) となる。



問題 14. 熱力学に関する以下の文章の空欄に適切な言葉または式を入れなさい。

[問 1] 外から何もせずに放置して到達する巨視的な変化のない状態を (1) と呼び, この状態にある一様な気体の性質は, 「気体の種類に依存せずに, 気体の (2) と (3) の積は, 物質量に比例し, (4) だけで決まる」という実験結果が知られている。これは, (5) の法則と呼ばれ, R を気体定数とすると N モルの気体は (6) の式に従う。この式を満たすような気体を (7) と呼んでいる。

[問 2] 熱力学の第 1 法則は, 外部から与えられる (8) dQ , (9) の増加 dU と, (10) p と (11) dV で表される外界への仕事を用いると (12) の式で記述できる。

[問 3] 一般的な比熱 C は, (8) dQ と温度変化 dT を用いて (13) の式で示される。たとえば, 硬い容器内の気体は加熱されても膨張できない。したがって, 体積が一定の条件下で加熱されることになる。この条件下で, 気体の (9) U は定積比熱 C_v と温度 T を用いると (14) の式で記述される。

[問 4] 物体内部がどれだけ乱雑に変化するかを表す量として, (15) S が定義されている。この可逆過程における微小変化 ΔS を, 外部から与えられた熱量 ΔQ と絶対温度 T を用いると (16) の式で記述できる。

0°C (絶対温度 273.15 K) の水 200g が融けて同じ温度の水になるときの (15) の変化を計算すると (17) J/K である。ただし, 水の融解熱を 334 J/g とする。

問題 15. 熱力学に関する以下の文章の空欄に適切な言葉または式を入れなさい。

[問 1] 熱力学の第 1 法則では, 外部から与えられる熱エネルギー dQ は, 内部エネルギーの増加 dU , 圧力 p と体積変化 dV で表される外界への仕事 (1) を用いると (2) の式で記述できる。

[問 2] 一般的な比熱 C は、熱エネルギー dQ と温度変化 dT を用いて $C = dQ/dT$ で表される。いま、気体を体積が一定という条件下で加熱したときの気体の比熱 C_v を (3) と呼び、 C_v は内部エネルギー U を用いて記述すると (4) となる。また、圧力が一定という条件下で気体を加熱したときの比熱 C_p を (5) と呼び、内部エネルギー U 、圧力 p と絶対温度 T を用いると (6) の式で記述できる。

[問 3] 箱に入った 1 モルの気体を温度 20°C から 70°C まで加熱した。このときの内部エネルギーの増加を計算すると (7) となる。ただし、モル比熱は $C_v = (3/2)R$ である。ここで、気体定数 $R = 8.31 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ はそのまま用いなさい。

[問 4] 流体である水を閉じ込めた箱の上部を可動壁にすると、流体の圧力は一定に保たれていると考えてよい。この環境では、温度が T_c を超えると体積は不連続に変化する。これは、水から (8) への転移として日常的に経験している現象である。つまり転移温度 T_c は圧力 p での (9) であり、 $T < T_c$ では液体、 $T > T_c$ では (10) になっている。このように相が不連続に変化することを (11) と呼ぶ。等温環境下で液体から気体へ変化するとき、液体は環境から熱を吸収する。この熱の最大値を (12) と呼ぶ。

問題 16. 1 モルの理想気体の系の圧力、温度、内部エネルギー、体積をそれぞれ p, T, U, V とし、この気体の定積モル比熱を C_v 、定圧モル比熱を C_p 、モル気体定数を R とする。このとき以下の各問に答え、あるいは問の文中の空欄に適当な数式を入れなさい。

問 1. 熱力学の第一法則を、外から系に加える熱量 dQ 、系の内部エネルギー増加 dU 、系の圧力 p 、系の外への体積変化 dV を用いて記述しなさい。

問 2. いまこの理想気体が定積変化 (体積一定の変化) をするとき、熱力学第一法則において $dV = 0$ とおけるので (1) が成り立つ。このことと比熱の一般的な定義より、理想気体の内部エネルギー変化 dU は定積比熱 C_V を用いて (2) のように与えられる。

問 3. この気体の系が断熱変化をする場合には $dQ = 0$ であるので、熱力学第一法則は次式のようになる。

$$(3)$$

一方、理想気体の状態方程式より圧力は、

$$p = (4)$$

のように書けるので、熱力学第一法則は温度 T と体積 V 、および気体定数 R と定積モル比熱 C_V を用いて、

$$(5) = 0$$

のように表現できる。したがって、この式を積分し、マイヤーの関係 $R = C_p - C_V$ と、比熱比 $\gamma = C_p/C_V$ を用いると、温度 T と体積 V に関して良く知られている断熱変化の関係式 (6) が得られる。理想気体の状態方程式をもう一度適用すると、圧力 p と体積 V の関係 (ポアソンの関係式) もすぐに得られ、比熱比 γ が 1 に近いと仮定すれば、互いに反比例に近い関係となることもわかる。

問 4. ディーゼル・エンジンにおいて、吸入や排気過程を省略した基本サイクルはディーゼル・サイクルと呼ばれ、断熱圧縮変化 (I)、最大圧力 p_0 での燃焼による定圧 (吸熱) 変化 (II)、断熱膨張変化 (III)、最大体積 V_0 での定積 (放熱) 変化 (IV) からなる可逆サイクルと考えることができる。いま、理想気体の比熱比が 1 に近いと仮定して、このディーゼル・サイクルの圧力-体積変化図の概略を描きなさい。

問題 17. 均質な物質 1 モルが有している内部エネルギー、体積、圧力、温度をそれぞれ、 U 、 V 、 p 、 T となる。さらに、この物質の定積モル比熱を C_v 、定圧モル比熱を C_p とする。このとき、比熱と状態量、状態変数の関係について、以下の設問に答えなさい。ここで、ある状態量 Z について、状態変数 X を一定にして、状態変数 Y で偏微分することを、以下のように表記する。

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X$$

微分形式で記述する場合には、この表記方法に従いなさい。

- 問 1. 1 モルの均質な物体の体積 V を一定にして、熱量 δQ が与えられたとき、温度と内部エネルギーの変化がそれぞれ ΔT 、 ΔU であった。このとき、定積モル比熱 C_v と ΔU の関係を記述しなさい。
- 問 2. 定積モル比熱 C_v を U 、 V 、 p 、 T を用いて微分形式で記述しなさい。表記する際に、指定された全ての状態変数および状態量を用いる必要がない場合には、その一部のみを使用して記述してよい。
- 問 3. 同じ物体 1 モルについて、圧力 p を一定に保って、温度を ΔT 上昇させるために必要な熱量が $\delta Q'$ であった。このときの体積変化量と内部エネルギーの変化量をそれぞれ、 ΔV 、 ΔU とする。定圧モル比熱 C_p と ΔU の関係を記述しなさい。
- 問 4. 定圧モル比熱 C_p を、 U 、 V 、 p 、 T を用いて微分形式で記述しなさい。表記する際に、指定された全ての状態変数および状態量を用いる必要がない場合には、その一部のみを使用して記述してよい。
- 問 5. 定圧モル比熱 C_p と定積モル比熱 C_v の間の関係を求めたい。ここで、 U 、 V 、 p 、 T に関して、次式で表される関係がある。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

この式を利用して、定圧モル比熱 C_p を、 C_v を用いて表しなさい。その式中に U 、 V 、 p 、 T およびその微分形式が含まれていてもよい。

問題 18. 熱力学に関する以下の問に答えなさい。

- 問 1. 次の文章の空欄に適切な言葉または式を入れなさい。

熱という [a] の出入りを使って仕事という [a] を周囲に出す系を熱機関という。仕事を行う熱機関の代表例としてはエンジン、タービンなどがある。一方、仕事を使って熱移動を行わせる熱機関としては冷凍機とヒートポンプがある。低温熱源から熱を汲み出すのを目的とする冷凍機の代表例には、冷蔵庫やルームクーラーがある。高温熱源に熱を放出するのを目的とするヒートポンプは、暖房用のエアコンに使われている。カルノーサイクルは二つの [b] 過程と二つの [c] 過程から構成される。高温熱源の温度を T_1 、低温熱源の温度を T_2 とすると、カルノーサイクルの効率 η は [d] で与えられる。仕事を行う熱機関サイクルに対して、熱移動を行わせるサイクルは逆カルノーサイクルと呼ばれる。

- 問 2. 温度 0°C と 50°C の二つの熱源の間に逆カルノーサイクルを行うヒートポンプを考える。このサイクルにおいて、1 サイクル当たり熱 $Q_2 = 12.5\text{kJ}$ を 0°C (絶対温度 273.15K) の低温熱源から受け、 50°C の高温熱源に Q_1 を与えるものとする。このとき、以下の各問に答えなさい。なお、解答だけでなく計算過程も示しなさい。

- (1) このヒートポンプを働かせるために必要な1サイクル当たりの仕事を W とする。 W と Q_1, Q_2 の関係を示し, $W[\text{kJ}]$ の値を求めなさい。
- (2) 上記 (1) の場合, 高温熱源に与える熱 $Q_1[\text{kJ}]$ の値を求めなさい。
- (3) 上記 (2) の熱 Q_1 と (1) の仕事 W の比 (Q_1/W) を求めなさい。

問3. 上記の問2の問題設定はそのまま, 高温熱源の温度のみを 50°C から 100°C にかえた場合について, 熱 Q_1 と仕事 W の比 (Q_1/W) を求めなさい。

問4. 上記の問2と問3の比較から, 逆カルノーサイクルにおいて比 (Q_1/W) の値がもつ意味を考察しなさい。

問題 19. 次の文章の に入る適切な式を解答用紙に記入しなさい。ただし, (N) についてはグラフの概形を解答用紙にかきなさい。

一次元ポテンシャル $V(x)$ 中の質量 m の粒子について, $V(x)$ が以下のように与えられたとする。ただし $V_0 > 0$ とする。

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

粒子のエネルギーを E とする ($-V_0 < E < 0$ とする)。領域 $|x| < a$ において, $k = \frac{\sqrt{2m(V_0 + E)}}{\hbar}$ とおくと ($\hbar = h/2\pi$ とする), シュレディンガー方程式

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = \text{ (A) }$$

となる。

領域 $|x| > a$ において, $\alpha = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$ とおくと, シュレディンガー方程式は

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = \text{ (B) }$$

となる。

領域 $|x| < a$ の解は偶関数と奇関数が考えられるが, 以後, 偶関数の解についてのみ考えることとすると上記の方程式の解は以下のように記述できる。

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\text{ (C) }} & (x < -a) \\ B \cos \text{ (D) } & (|x| < a) \\ Ce^{\text{ (E) }} & (x > a) \end{cases}$$

$x = -a$ で $\psi(x)$ が等しくなるという境界条件から以下が成り立つ。

$$\text{ (F) }$$

$x = -a$ で $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$ が等しくなるという境界条件から以下が成り立つ。

$$\text{ (G) }$$

$x = a$ で $\psi(x)$ が等しくなるという境界条件から以下が成り立つ。

$$\boxed{\text{(H)}}$$

$x = a$ で $\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}$ が等しくなるという境界条件から以下が成り立つ。

$$\boxed{\text{(I)}}$$

$\boxed{\text{(G)}}$ 式を $\boxed{\text{(F)}}$ 式で割る, あるいは, $\boxed{\text{(I)}}$ 式を $\boxed{\text{(H)}}$ 式で割ると α は以下のよう
に k と a で表現することができる。

$$\alpha = \boxed{\text{(J)}} \quad (1)$$

一方, $k = \frac{\sqrt{2m(V_0 + E)}}{\hbar}$ と $\alpha = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$ から, $k^2 + \alpha^2$ は m, \hbar, V_0 を用いて

$$k^2 + \alpha^2 = \boxed{\text{(K)}} \quad (2)$$

と書ける。ここで $ka = X, \alpha a = Y$ とおくと, (1) 式から

$$Y = \boxed{\text{(L)}} \quad (3)$$

が導かれ, (2) 式から $X^2 + Y^2$ は a, m, \hbar, V_0 を用いて

$$X^2 + Y^2 = \boxed{\text{(M)}} \quad (4)$$

と表現することができる。(3) と (4) について, 横軸を X ($0 \leq X < \pi/2$), 縦軸を Y ($Y \geq 0$) とし
てグラフで表わすと $\boxed{\text{(N)}}$ のようになる。このグラフの交点が固有エネルギーの状態を表して
いる。 $\boxed{\text{(N)}}$ のグラフについては, 各パラメータは適当な値を用いて構わないが, X 軸, Y 軸,
 $X = \pi/2$ の直線 (解答用紙のグラフ上の点線) との交点がある場合には, その交点の値をグラフ中
に示すこと。

問題 20. 次の文章の $\boxed{\phantom{\text{ }}}$ に適切な式を入れなさい。

一次元ポテンシャル $V(x)$ の中の質量 m の粒子に対し, 時間に依存しないシュレディンガーの
波動方程式を, エネルギーを E , 波動関数を $\psi(x)$ とし, $\hbar = h/2\pi$ を用いて記述すると $\boxed{\text{(1)}}$
となる。ここで $V(x)$ が以下のように与えられたとする。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < d) \\ \infty & (x \leq 0, x \geq d) \end{cases}$$

領域 $0 < x < d$ において, $V(x) = 0$ であるため, (1) のシュレディンガーの波動方程式は $\boxed{\text{(2)}}$

となる。ここで $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ とおくと $\boxed{\text{(2)}}$ 式は以下のように書ける。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = \boxed{\text{(3)}}$$

この微分方程式の一般解は定数 A, B を用いて,

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

と表わすことができる。ここで境界条件 $\psi(0) = \boxed{\text{(4)}}$, $\psi(d) = \boxed{\text{(5)}}$ を適用すると

$$A + B = \boxed{\text{(4)}}$$

$$Ae^{ikd} + Be^{-ikd} = \boxed{\quad} \quad (5)$$

となる。この連立一次方程式において、 $A = B = 0$ 以外の解を持つとすると以下が成り立つことがわかる。

$$e^{ikd} - e^{-ikd} = \boxed{\quad} \quad (6)$$

ここでオイラーの公式

$$e^{i\theta} = \boxed{\quad} \quad (7)$$

$$e^{-i\theta} = \boxed{\quad} \quad (8)$$

を用いると

$$\sin(\boxed{\quad} \quad (9)) = 0$$

となる。これを満たすのは

$$\boxed{\quad} \quad (9) = n\pi$$

のときである。このことから、 E は \hbar, π, n, m, d を用いて、以下のように記述できる。

$$E = \boxed{\quad} \quad (10)$$

問題 21. 図に示すように、 x 軸に沿って入射してきた波長 λ の X 線光子が原点 O に静止している電子（静止質量 m_0 ）と衝突した結果、光子は角度 ϕ の方向に進み、電子は θ の方向に進んだとする。衝突後の光子の波長を λ' とし、その波長変化 $\lambda' - \lambda$ を求めたい。

衝突前の光子のエネルギーはプランク定数を h 、光速を c とすると $\boxed{\quad} \quad (1)$ となり、衝突後の光子のエネルギーは $\boxed{\quad} \quad (2)$ となる。一方、衝突前の電子のエネルギーは静止質量 m_0 と光速 c を用いて $\boxed{\quad} \quad (3)$ と表せる。衝突後の電子のエネルギーは、衝突後の電子の運動量を p とすると $\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$ で与えられる。エネルギー保存則から

$$\boxed{\quad} \quad (1) + \boxed{\quad} \quad (3) = \boxed{\quad} \quad (2) + \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

となる。この式を変形して、 p^2 を求めると

$$p^2 = \boxed{\quad} \quad (4)$$

となる。

一方、衝突前の光子の運動量は $\boxed{\quad} \quad (5)$ であり、 x 方向の運動量保存則から

$$\boxed{\quad} \quad (5) = \boxed{\quad} \quad (6)$$

y 方向の運動量保存則から

$$0 = \boxed{\quad} \quad (7)$$

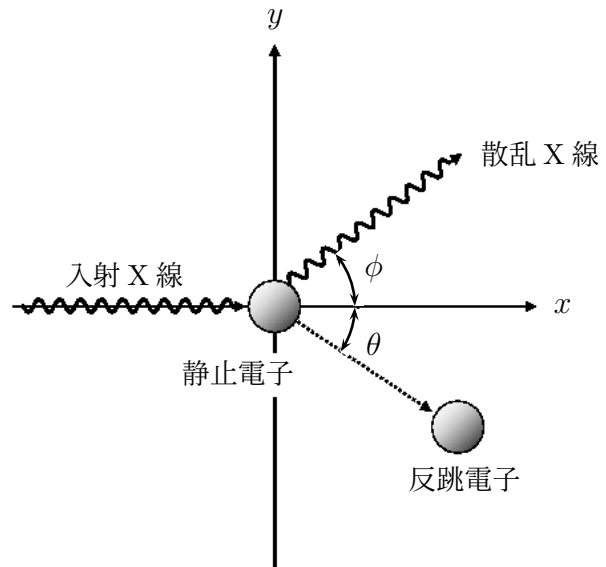
と表せる。この 2 式から $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ により、 θ を消去すると、 p^2 は $h, \lambda, \lambda', \cos \phi$ を用いて、以下のように表現できる。

$$p^2 = \boxed{\quad} \quad (8)$$

上記で求めた結果を用い、 $\boxed{\quad} \quad (4) = \boxed{\quad} \quad (8)$ として整理すると、 $\lambda' - \lambda$ は $h, c, m_0, \cos \phi$ を用いて

$$\lambda' - \lambda = \boxed{\quad} \quad (9)$$

と表せる。



問題 22. 以下の文中の空欄 (1)~(14) に適当な数式または語句を入れなさい。

電子の運動による磁気モーメントを古典物理学の立場から表すと以下ようになる。まず、電荷 $-e$ をもつ質量 m の電子が半径 r の円軌道を速度 \vec{v} (大きさ v) で周回すると仮定すると、電流の大きさは $I =$ (1), 軌道の面積は $S =$ (2) となる。このとき、磁気モーメントの大きさ μ は (3) と表せる。ここで、角運動量の大きさを L を m, v, r を用いて表すと (4) となる。磁気モーメントの大きさ μ は L を用いて、(5) L とも表すことができる。空欄 (5) で与えられる、電子の軌道運動による磁気モーメントの大きさと角運動量の大きさとの比は (6) と呼ばれる。

量子力学的な見方を導入すれば、角運動量の大きさは量子化されプランク定数 $h/2\pi = \hbar$ の単位で測られるため、空欄 (5) はプランク定数を用い (7) と表される。これは磁気モーメントの単位として μ_B という記号でも表され、(8) 磁子と呼ばれる。

次に、軌道角運動量 \mathcal{L} をもつ電子が真空の磁場で運動しているとする。電場 \vec{E} , 磁場 \vec{H} の中で電荷 $-e$ をもつ電子が速度 \vec{v} で運動する場合、その運動量 \vec{p} は、

$$\vec{p} = m\vec{v} - e\vec{A}$$

で与えられる。ここで、 \vec{A} はベクトルポテンシャルであり、磁場 \vec{H} は $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$ である。したがって、静電ポテンシャルを V とすれば、ハミルトニアン \mathcal{H} は、

$$\mathcal{H} =$$
 (9) $+ V$

となる。そこで、 z 方向に強さ H の一様な磁場がある場合、任意の座標 (x, y, z) におけるベクトルポテンシャル \vec{A} の x, y, z 成分はそれぞれ、

$$A_x =$$
 (10), $A_y =$ (11), $A_z =$ (12)

とできる。

以上より、ハミルトニアン \mathcal{H} を運動量の x, y, z 成分である p_x, p_y, p_z を用いて表すと、

$$\mathcal{H} =$$
 (13)

となり、シュレーディンガー方程式は、波動関数を ϕ として、

$$$$
 (14)

となる。

問題 23. 式 (1) の一次元ポテンシャル $V(x)$ の中に、質量 m , エネルギー E の量子力学的粒子が置

かかれている。以下の設問に答えなさい。ただし、 D, V_0 は正の定数である。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x \leq 0 & : \text{領域 1}) \\ 0 & (0 < x \leq D & : \text{領域 2}) \\ V_0 & (D < x & : \text{領域 3}) \end{cases} \quad (1)$$

- 問 1. 領域 2 および領域 3 について、粒子の状態を記述するシュレディンガー方程式を書きなさい。ただし、波動関数を $\Psi(x)$ とし、プランク定数を h , また $\hbar = h/(2\pi)$ とする。
- 問 2. 問 1 の方程式を満たす、領域 2 での波動関数を $\Psi_2(x)$, 領域 3 での波動関数を $\Psi_3(x)$ とする。このとき、これらの波動関数が領域 2 と領域 3 の境界 $x = D$ において満たすべき境界条件を示しなさい。
- 問 3. 粒子のエネルギー E が V_0 より小さい場合 ($E < V_0$) について、この問題を解いたところ、波動関数の解が例えば 5 個得られたとする。このとき、低い方から 2 番目のエネルギーを持つ波動関数の概要を図示しなさい。波動関数は規格化されている必要はなく、値も厳密である必要はないが、特に領域 2, 3 での波動関数の形状と、 $x = 0$ および $x = D$ での波動関数の値や傾きなどのようすに注意して、その概要を図示すること。

問題 24. 量子論に関する以下の問に答えなさい。

問 1. 一次元ポテンシャル $V(x)$ の中で運動する質量 m の粒子の状態を記述するシュレディンガー方程式を書きなさい。また、エネルギーを E として、定常状態の (時間によらない) シュレディンガー方程式を書きなさい。

問 2. 直線上の 2 定点間を運動する粒子を考える。すなわち、

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ \infty & (x \leq 0, x \geq a) \end{cases}$$

で定義されるポテンシャル内での状態を考える。この場合、エネルギー準位は $E = n^2 h^2 / 8ma^2$ (n は正の整数で、 h はプランク定数) で与えられることを示しなさい。

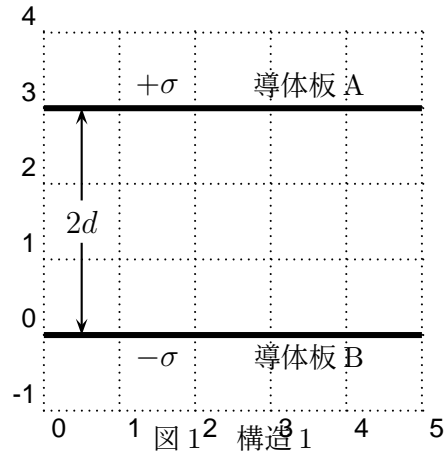
問 3. 境界条件を変えて、問 2 のポテンシャルの代わりに、

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ V_0 & (x \leq 0, x \geq a) \end{cases}$$

である場合を考える。ただし、 V_0 は正の定数である。このときの最低エネルギーは問 2 の場合のそれより低い。この理由を簡潔に説明しなさい。

電磁気学

問題 1. 図 1 に示すように、真空中に 2 枚の大きな薄い導体板 A と B が、大きさに比べて十分小さい距離 $2d$ だけ隔てて平行に置かれている。真空の誘電率を ϵ_0 として次の各問に答えなさい。



- (1) これをコンデンサとして、導体板 A と B にそれぞれ面密度 $+\sigma$ と $-\sigma$ の電荷を与える。導体板 A, B ともに、電荷がすべてコンデンサの内側に集まることを証明しなさい。
- (2) 図 2(a) および図 2(b) に示すように、導体板 A, B それぞれの中央に、厚みが $2t$ の大きな誘電体 C (誘電率 ϵ_1) と導体 C を、導体板 A, B との間隔 W で平行に置いた。ここで、導体板 A と B にそれぞれ面密度 $+\sigma$ と $-\sigma$ の電荷を与える。誘電体 C および導体 C 表面上の電荷密度、およびコンデンサ内各領域 (誘電体 C および導体 C 内も含む) の電界を求めなさい

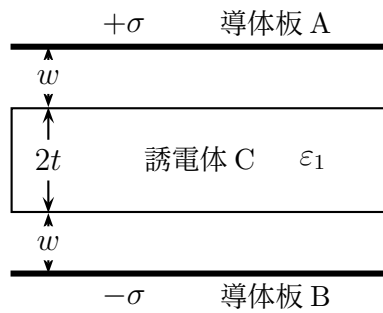


図 2(a) 構造 2-a

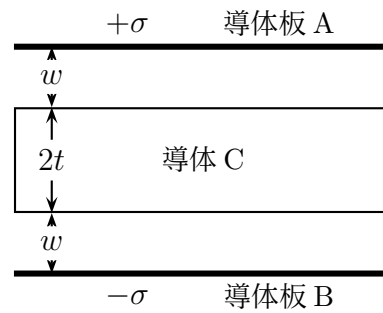


図 2(b) 構造 2-b

- (3) (3-1)
 図 3(a) に示すように、図 2(a) に示した誘電体 C の表面上に大きな薄い導体板 D と E を置き、導体板 A と B にそれぞれ面密度 $+\sigma$ と $-\sigma$ の電荷を与える。図 2(a) の場合と対比して、コンデンサ内各部分の電荷密度、および各領域の電界に、導体板 D, E が与える影響を説明しなさい。

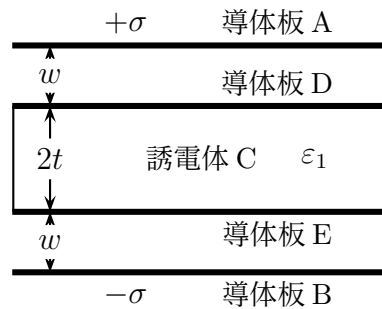


図 3(a) 構造 3-a

- (3-2)
 図 3(b) と図 3(c) に示すように、導体板 D と E に定電圧電源を接続し、それぞれの電圧を 0 お

よび V とした。ここで導体板 A と B にそれぞれ面密度 $+\sigma$ と $-\sigma$ の電荷を与える。導体板 D と E それぞれの両面 (誘電体 C 側および真空領域側) の電荷密度, およびコンデンサ内各領域の電界を求めなさい。

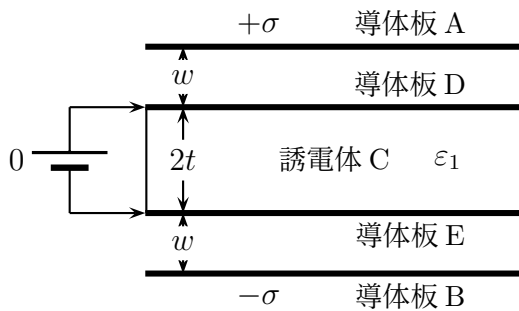


図 3(b) 構造 3-b

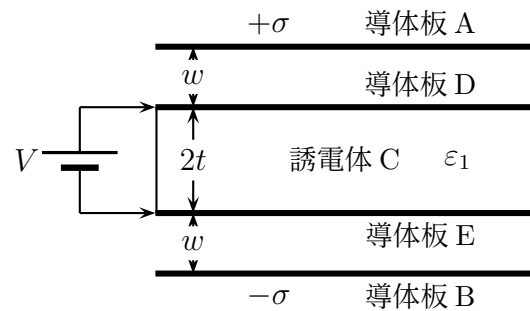


図 3(c) 構造 3-c

- (4) 図 1-図 3 に示した, 構造 1, 構造 2-a, 構造 2-b, 構造 3-a, 構造 3-b, および構造 3-c, それぞれについて, 導体板 A-B 間の単位面積当たりの静電容量を求めなさい。

問題 2. 図 1~3 に示すように, 自由空間中に電荷が分布しているとき, それぞれの電荷分布について, 点 P における電位 ϕ および電界 \vec{E} を求めなさい。同時にその導出過程も示しなさい。また, それぞれの場合について, 電位 ϕ および電界の大きさ E を図示しなさい。ただし, 自由空間の誘電率は $\epsilon_0(\text{F/m})$ とする。

- (1) 図 1 に示すように, 半径 $a(\text{m})$ の円周上に一様な電荷 $\sigma(\text{C/m})$ が分布しているとき, 円の中心 O を貫く軸上の点 P における電位および電界を求め, それらを図示しなさい。ただし, 軸は円に対して垂直である。

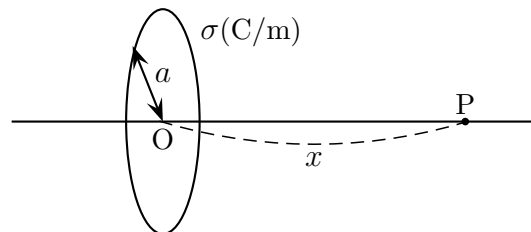


図 1: 円周上に一様な電荷 σ が分布している場合

- (2) 図 2 に示すように, 半径 $a(\text{m})$ の球面上に一様な電荷 $\omega(\text{C/m}^2)$ が分布しているとき, 球内外の点 P における電位および電界を求め, それらを図示しなさい。

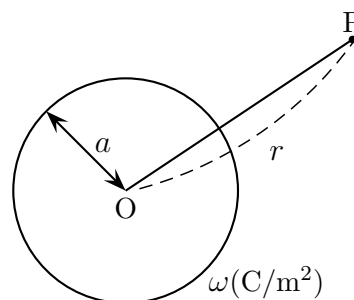


図 2: 球面上に一様な電荷 ω が分布している場合

- (3) 図3に示すように、半径 a (m) の球内に一様な電荷 ρ (C/m³) が分布しているとき、球内外の点 P における電位および電界を求め、それらを図示しなさい。

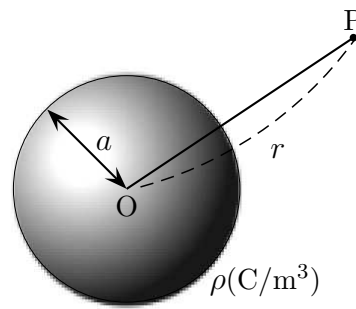


図3: 球内に一様な電荷 ρ が分布している場合

問題3. 図1に示すように、十分に広い2枚の平行な導体板 A と B が間隔 d だけ隔ててできた平行板コンデンサがある。コンデンサ内の一部に誘電率 ϵ_1 で厚さ x の誘電体を入れ、残りの部分は真空になっている。ここで、導体板間に電圧 V を印加した時、両導体板にはそれぞれ面密度 $+\sigma$ と $-\sigma$ の電荷が誘起されるとし、次の各問に答えなさい。なお、真空の誘電率は ϵ_0 とする。

- (1) 誘電体および真空中の電界 E_1 と E_0 を σ で表しなさい。
- (2) 誘電体の厚さ x を変えた時の、電圧 V と σ の関係式を求めなさい。
- (3) 誘電体の厚さ x を変えた時の、 E_1 および E_0 それぞれについて、電圧 V との関係式を求めなさい (式には σ を含まないこと)。
- (4) 平行板コンデンサの単位面積当たりの容量 C を求めなさい。
- (5) 誘電体の比誘電率 ϵ_s が 10、厚さ x が $d/2$ とし、まず E_1 および E_0 を求めなさい。次に、コンデンサ内の電位分布を図示し、全体の電圧 V が、誘電体と真空部分でどのように分圧されるか、説明しなさい。
- (6) 誘電体の比誘電率 ϵ_s が 10 の時、真空中の電界 E_0 の誘電体厚さ x への依存性を図示しなさい。ここで、真空中の電界 E_0 が、この誘電体の有無 ($x = 0, x = d$) により、どのように変化するか、数値を用いて具体的に説明しなさい。
- (7) $x = 0$ および $x = d$ の時の容量をそれぞれ C_0 および C_1 とし、電圧 V 印加時に C_0 と C_1 に蓄えられるエネルギーを求めなさい。
- (8) 上記 (7) の C_0 および C_1 それぞれにおいて、電荷を保持したまま、電圧 V を切り離し、導体 A と導体 B 間に働く単位面積当たりの力 (大きさと方向) を求めなさい。また、誘電率が、この力にどのように影響するかを説明しなさい。

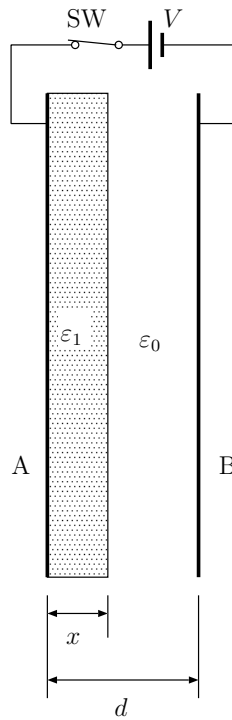


図 1

問題 4. 図 1 に示すように、点電荷 $+Q$, $-Q$ が z 軸上の点 $(0, 0, d)$, $(0, 0, -d)$ に配置されている。媒質の誘電率は ϵ_0 として次の各問に答えなさい。なお、無限遠点の電位を 0 とする。

- (1) 両点電荷 $+Q$, $-Q$ が任意の点 (x, y, z) につくる電位 $\phi(x, y, z)$ を表しなさい。
- (2) 無限遠点から微小電荷 q を xy -平面に沿って原点 0 まで運ぶのに必要な仕事 W を求めなさい。
- (3) xy -平面上の点 $(x, y, 0)$ における電界 \vec{E} を求めなさい。
- (4) 無限導体平板を xy -平面においたとき、導体平板の上側の表面に静電誘導される面電荷の電荷密度 $\sigma(x, y)$ を求めなさい。なお、導体板の厚さは d に比べて無視できるものとする。
- (5) 点電荷 $+Q$ が無限導体平板から受ける力 \vec{f} を求めなさい。

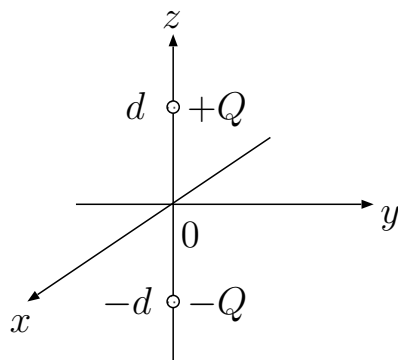


図 1

問題 5. 図 1 に示すように、面積 S で同一形状の 2 枚の導体平板 (導体 A および B) がその大きさに対して十分狭い距離 d を隔てて平行に配置されている。このとき、以下の設問に答えなさい。

- (1) この2枚の導体平板が真空中に置かれているとき、導体Aに面密度 $+\sigma$ ($\sigma > 0$)、導体Bに面密度 $-\sigma$ となるような電荷を与えた。このとき、導体端部の乱れを無視すると電界は導体間だけに集中する。その理由を簡単に説明しなさい (200字程度を目安とする)。
- (2) (1)において導体間に生じる電界の大きさ、および、導体Bを基準とした導体Aの電位を求めなさい。なお、真空の誘電率は ϵ_0 とする。
- (3) (1)の電荷を保ったまま、この2導体全体を誘電率 ϵ ($\epsilon > \epsilon_0$) の絶縁性液体にゆっくりと浸した。このとき、導体Aと2導体間の液体の境界面に生じる分極電荷密度を求めなさい。
- (4) (3)の状態、導体Aと導体Bの間に働く力を求めなさい。
- (5) (3)の状態、図2のように2導体間の導体Aから距離 x の位置に点電荷 q を置いた。点電荷は導体端部からは十分離れた位置にあるものとする。このとき点電荷に働く静電気力は、2導体に始めから分布していた電荷 ($\pm\sigma$) による力と、この点電荷によって2導体に新たに誘起された電荷による力の重ね合わせによって考えられるものとする。後者を電気映像法(鏡像法)によって解く場合に、どのように鏡像電荷を置けばよいかを説明しなさい。図を用いてもよい。
- (6) (5)において点電荷に働く力を x の関数として求めなさい。

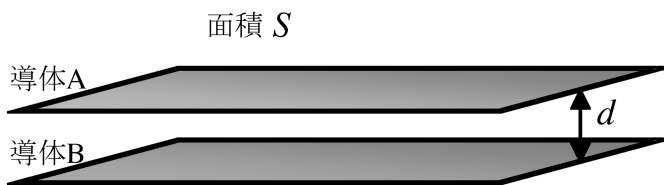


図1

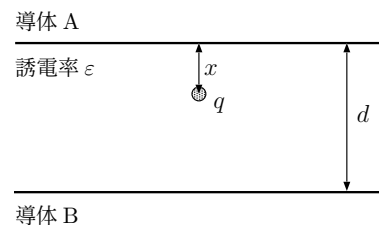


図2

問題6. 図1のように無限に長い線電荷が x 軸に沿って置かれている。この線電荷の電荷密度は λ ($\lambda > 0$) であり、太さは無視できるものとする。真空の誘電率を ϵ_0 とする。以下の設問に答えなさい。

- (1) まず、図中に描かれている線素 dx に存在する電荷 λdx による電界を考える。この線素に置かれている電荷により y 軸上の点 $(0, y, 0)$ に生じる電界の y 方向成分 dE_y を $\lambda, y, \theta, d\theta$ を用いて示しなさい。
- (2) (1)で求められた電界を積分して、この線電荷周りの空間における電界の大きさを θ を含まない y の関数として示しなさい。ただし、導出にはガウスの法則を用いないこと。

次に、図2のように、その線電荷を x 軸に平行のまま $(0, 0, h)$ を通るように移動し、 xy 平面上に無限に広く、帯電していない導体板を置いた。

- (3) $z > 0$ の半空間にある任意の点 (x, y, z) における電界ベクトルを求めなさい。また、電気力線の様子を解答用紙の図中にその特徴がわかるように示しなさい。
- (4) このときの導体板表面における電荷分布を y の関数として求めなさい。

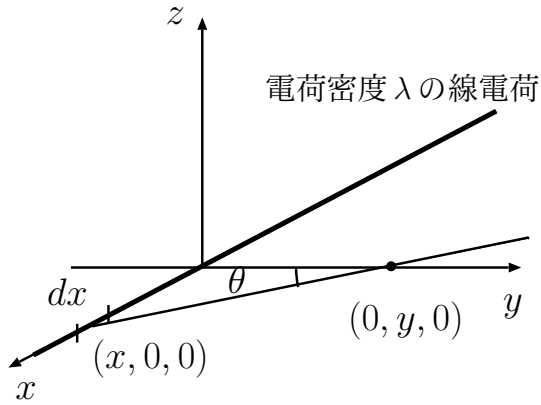


図 1

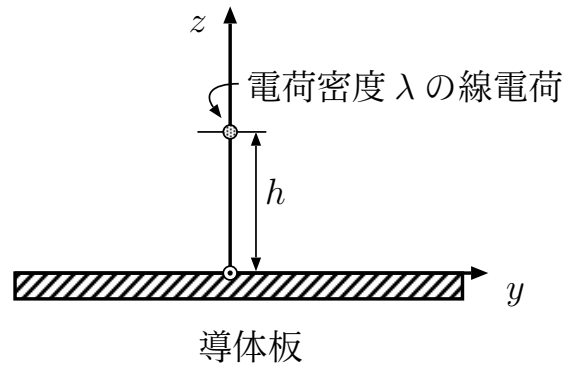
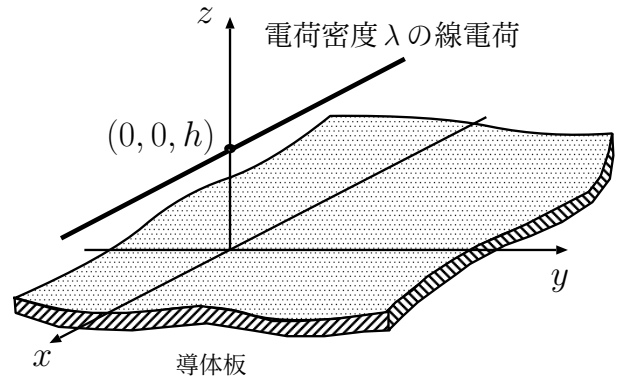
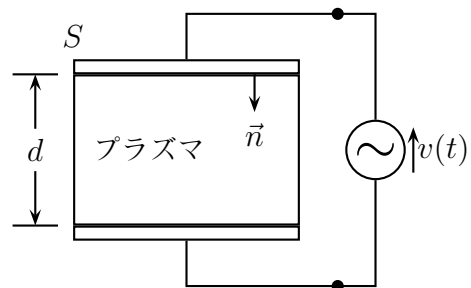


図 2

問題 7. 図に示すように、面積 S 、間隔 d の平行平板コンデンサがある。これに角周波数 ω の起電力 $v(t)$ の交流電源が接続されている。平行平板コンデンサは充分広く、また端の効果は無視できるものとする。

このコンデンサの極板間が電子および一種類の正イオンで構成されるプラズマで満たされているものとし、以下の間に答えなさい。ここで、電子の電荷、質量および数密度は、それぞれ q_e 、 m_e および N_e 、またイオンの電荷、質量および数密度をそれぞれ q_i 、 m_i および N_i とする。また、真空の誘電率を ϵ_0 、 \vec{n} を単位法線ベクトルとする。



$$v(t) = V_m \sin \omega t$$

図

- (1) プラズマ内の電界 \vec{E} を振幅 V_m 、角周波数 ω を用いて表せ。
- (2) 電子およびイオンの運動方程式を書け。ただし、電界 \vec{E} 内での電子およびイオンの変位をそれぞれ \vec{r}_e および \vec{r}_i とする。
- (3) 電荷 q の荷電粒子の変位を \vec{r} とするとき、1 個の粒子による電気分極は $q\vec{r}$ である。また、 $\omega_e^2 = \frac{N_e q_e^2}{m_e \epsilon_0}$ および $\omega_i^2 = \frac{N_i q_i^2}{m_i \epsilon_0}$ とすると、プラズマ角周波数 ω_p は、 $\omega_p^2 = \omega_e^2 + \omega_i^2$ で与えられる。プラズマ角周波数 ω_p を用いて、電気分極密度 \vec{P} および電束密度 D を示せ。

- (4) 平行平板間の電気エネルギー密度 $w_e(t)$, および電子とイオンの運動エネルギーからプラズマの運動エネルギー密度 $w_k(t)$ を示せ。
- (5) $w_e(t)$ および $w_k(t)$ の時間平均をそれぞれ \bar{w}_e および \bar{w}_k とすると,
- (i) $\omega > \omega_p$ のとき $\bar{w}_e > \bar{w}_k$
 - (ii) $\omega < \omega_p$ のとき $\bar{w}_e < \bar{w}_k$
 - (iii) $\omega = \omega_p$ のとき $\bar{w}_e = \bar{w}_k$

となる。電気エネルギー密度 $w_e(t)$ および荷電粒子の運動エネルギー密度 $w_k(t)$ の時間変化の様子を図示し、それぞれの場合のエネルギーの流れについて、簡潔に説明せよ。

問題 8. 図 1 に示すように、半径 a (m) および長さ l (m) の平行な往復導体が、軸どうしの間隔を d (m) として配置されている。ここで、自由空間中 (透磁率 μ_0 (H/m)) に配置された導体の透磁率は μ (H/m) である。この導体の単位長さあたりの自己インダクタンス L を求めなさい。ただし、電流 I (A) は円形断面に一様に分布しているものとし、 $a \ll d \ll l$ を満たすものとする。

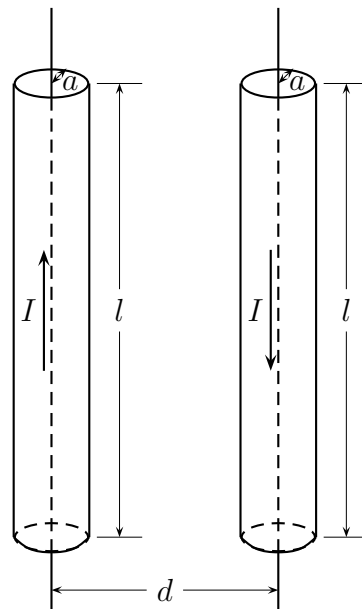


図 1: 2つの直線導体の配置図

問題 9. 真空中透磁率 μ_0 に、図 1 に示すような、長さ l , 断面積 S の 2 個の鉄心が距離 d (ただし $d \ll l$) の空隙を隔てて相対して配置されている。上側の鉄心には巻数 N のコイルが巻かれており、電流を I_0 だけ流しているとき、以下の設問に答えなさい。なお、漏れ磁束はなく、空隙における磁束の広がりには考えなくてよい。

- (1) 鉄心中の磁界の大きさを H , 空隙の磁界の大きさを H_0 とするとき、これらの間に成り立つ式を求めなさい。
- (2) 鉄心の透磁率を μ とするとき、鉄心中の磁束密度 B を求めなさい。
- (3) このコイルのインダクタンス L を求めなさい。
- (4) 空隙の単位体積当たりの磁気エネルギー密度 W を求めなさい。
- (5) 2つの鉄心間に生じる吸引力の大きさ F を求めなさい。

- (6) 図1のコイルによる電磁石を, 図2のように永久磁石に置き換えた場合の, 永久磁石中の磁界が H_m に, 磁束密度は B_m にそれぞれなった。このとき H_m と B_m の間に成り立つ関係式を求めなさい。

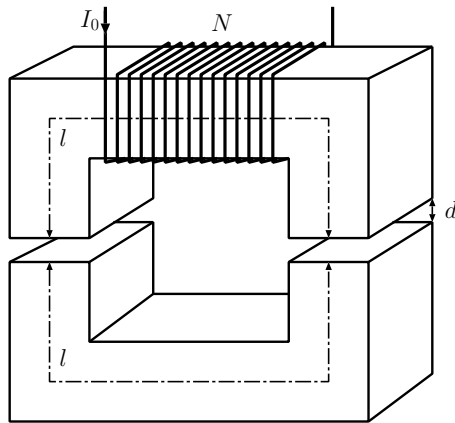


図1

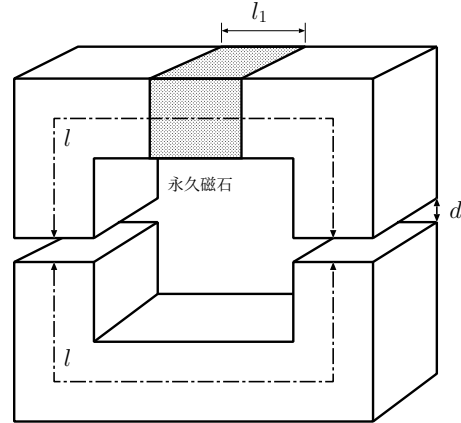


図2

問題 10. 図1に示すような鉄心1と鉄心2が距離 $x (\ll d_0)$ の空隙を挟み平行に置かれている。鉄心1には巻数 N_1 のコイル1が巻かれており, 電流 I_1 が流れている。このとき, 以下の各問に答えなさい。ただし, 各コイルおよび空隙でのみれ磁束は無視するものとし, 両鉄心の透磁率は μ_i で一定, 空隙の透磁率は μ_g とし, それぞれの鉄心の平均的な磁路長は d_0 , 断面積は S_0 する。

- (1) 図1の空隙の磁界の大きさ H_g を求めなさい。
- (2) 図1のコイル1の自己インダクタンス L_1 を求めなさい。
- (3) 図1の鉄心1と鉄心2の間の2つの空隙に生じる力の合計を求めなさい。
- (4) 図2に示すように鉄心2に巻数 N_2 のコイル2を巻き, 電流 I_2 を流す。このとき, 鉄心1-空隙-鉄心2を通る磁束 Φ を求めなさい。
- (5) 図2のコイル2の自己インダクタンス L_2 を求めなさい。
- (6) 図2のコイル1およびコイル2間の相互インダクタンス M を求めなさい。ただし, もれ磁束は無視するものとする。
- (7) 図2の2つの空隙に生じる力の合計を求めなさい。

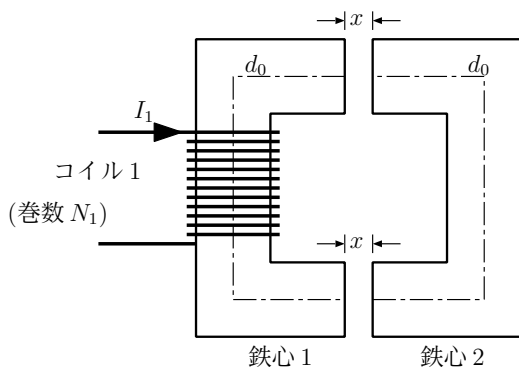


図1

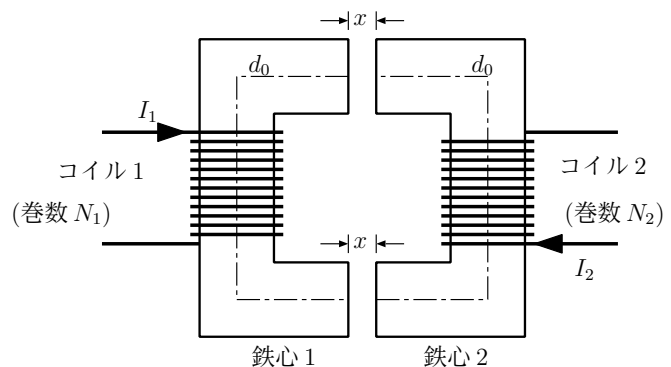


図2

問題 11. 図1に示すように, 透磁率 μ_0 の真空中において, 電流が導体円筒側面に沿って一様に流れている。円筒の軸方向の単位長さ当りの電流の大きさを J とし, $a \ll l$ とする。このとき以下の設問に答えなさい。

- (1) 円筒内部の磁界の大きさを求めなさい。
- (2) このとき、この導体円筒のインダクタンスを求めなさい。

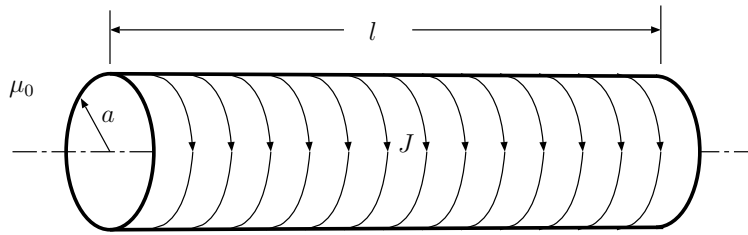
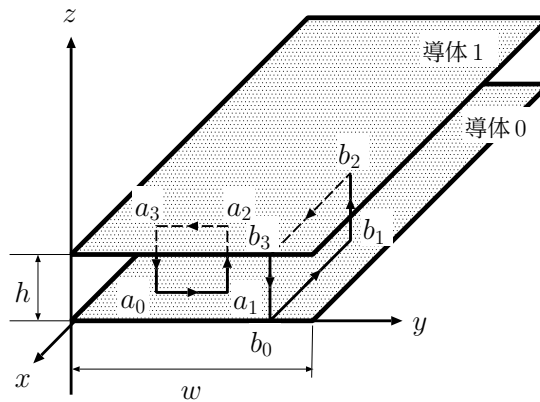


図 1

問題 12. 図において x 方向に無限に長い平行平板導体 (幅 w) の導電率は十分大きく、その厚さを無視できるものとする。導体 1 には $+x$ 方向に電流 I が流れ、導体 0 には逆方向に同じ大きさの電流が流れているものとする。また、導体上での電流分布を均一とし、両導体板間の間隔 h が w に比べて十分に小さく、端部の影響が無視できるものと近似する。さらに、導体以外の空間は真空中、その透磁率は μ_0 とする。以下の設問に答えなさい。

- (1) 図中に示す yz 面内を $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_0$ と一周する経路に対して、アンペールの法則を適用することにより、導体板間の間隙における磁界の大きさや方向を求めなさい。なお、導出手順も示しなさい。また、間隙以外の部分での磁界は無条件で零であるとしてよい。
- (2) 図中に示す zx 面に平行な面内を $b_0 \rightarrow b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow b_3 \rightarrow b_0$ と一周する経路に対して、ファラデーの法則を適用することにより、 x 方向単位長さあたりの自己インダクタンス L を求めなさい。なお、導出手順も示しなさい。



図

問題 13. 一様な磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B)$ と一様な電界 $\vec{E} = (0, E, 0)$ が与えられている領域で、質量 m および電荷 e を持つ荷電粒子が速度 \vec{v} で運動している。このとき、以下の問いに答えなさい。必要ならば、ベクトル $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ に対する公式、 $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) + \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C})$ を用いなさい。

- (1) 荷電粒子の運動方程式を、ベクトルを用いて示しなさい。
- (2) $\vec{v}' = \vec{v} - \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{B}|^2}$ で定義される速度 \vec{v}' が表す荷電粒子の運動は、電界がないときの運動と等しいことを示しなさい。
- (3) ここでは、荷電粒子の xy 平面での運動を考える。時刻 $t = 0$ において原点にあった荷電粒子の速度は $\vec{v} = 0$ であった。この荷電粒子の時刻 t における x および y 方向の速度と、 xy 平面での位置を求めなさい。

問題 14. 図 1 に示すように、平面電磁波が完全導体板入射波の電界は y 成分のみを有し、 $E_y^i = E_0 e^{j\omega t} e^{-jk_0(z \sin \theta - x \cos \theta)}$ で与えられる。なお、導体板は無限に大きいものとし、媒質の誘電率および透磁率をそれぞれ ϵ_0, μ_0 とする。

- (1) 電界が導体面上 ($x = 0$) で 0 になることに注意して、反射波の電界 E_y^r を求めなさい。
- (2) 入射波と反射波との干渉により、導体面以外の平面上でも 0 となる所がある。その平面を表す式を求めなさい。

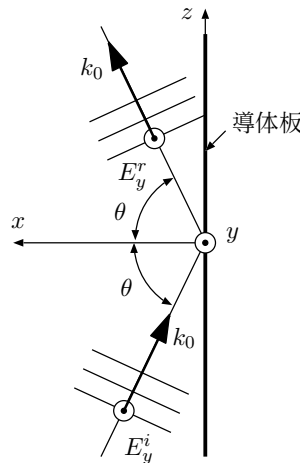


図 1

問題 15. 電荷、電流のない真空中 (誘電率 ϵ_0 , 透磁率 μ_0) を電界 $\vec{E}^i(z, t)$, 磁界 $\vec{H}^i(z, t)$, 波数 \vec{k}^i , 角周波数 ω を持つ平面電磁波が、 $+z$ 方向に伝搬している。ただし、電界 $\vec{E}^i(z, t)$ は x 成分のみを、磁界 $\vec{H}^i(z, t)$ は y 成分のみを持つ。また、矢印付き文字はベクトルを表す。以下の設問に答えなさい。

- (1) この平面電磁波の電界 $\vec{E}^i(z, t)$, 磁界 $\vec{H}^i(z, t)$ を、 \vec{k}^i, ω などを用いて式で表しなさい。ただし、それぞれの振幅 (スカラー) を E_0^i, H_0^i とする。
- (2) マクスウェル方程式に対して (1) の電界と磁界を代入することにより、 k^i および $Z_0 (= E_0^i/H_0^i)$ を ϵ_0, μ_0 など で表しなさい。なお、必要ならば恒等式 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ を利用しなさい。

次に、この電磁波が、 $z > 0$ の半空間に広がる絶縁体 (ϵ , 透磁率 μ) に垂直に入射する場合を考える (図参照)。

- (3) $z = 0$ の境界面において、入射した電磁波は、反射電磁波 (電界 $\vec{E}^r(z, t)$, 磁界 $\vec{H}^r(z, t)$, 波数 \vec{k}^r) と透過電磁波 (電界 $\vec{E}^t(z, t)$, 磁界 $\vec{H}^t(z, t)$, 波数 \vec{k}^t) を生じさせる。(1) と同様に、これら電磁波の電磁界を式で表しなさい。ただし、 $\vec{E}^r(z, t), \vec{H}^r(z, t), \vec{E}^t(z, t), \vec{H}^t(z, t)$ の振幅をそれぞれ $E_0^r, H_0^r, E_0^t, H_0^t$ とする。
- (4) $z = 0$ の境界面において、電磁界の連続性から導かれる関係式をすべて示しなさい。
- (5) この絶縁体中での E_0^t/H_0^t を Z とする。(4) で求めた関係式を利用して、 $z = 0$ における電磁波エネルギーの反射率を、 Z_0, Z などを用いて表しなさい。

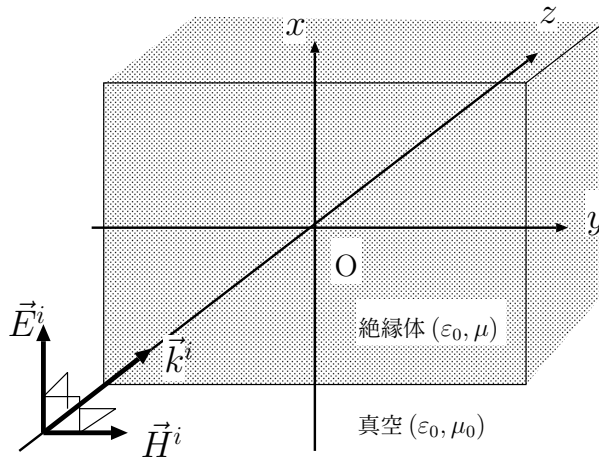


図 1

回路理論

問題 1. 図 1 の交流回路に関する以下の設問に答えなさい。ただし、交流電圧源 \dot{V} の動作角周波数は ω である。また、ドットを付した文字は複素数を表すものとする。

- (1) 図 1 中のループ電流 \dot{I}_1, \dot{I}_2 が満たす網目方程式を行列を用いて書きなさい。
- (2) L_1, L_2, M の部分を相互インダクタンスを含まず、自己インダクタンスのみを用いて表した図 1 の回路の等価回路を描きなさい。
- (3) (1) で求めた連立線形方程式の係数行列の行列式 Δ を計算しなさい。この連立線形方程式を解き、 Δ を用いて、ループ電流 \dot{I}_1, \dot{I}_2 を表しなさい。
- (4) $\dot{I}_1 = 0$ となる条件を導きなさい。また、そのときの \dot{I}_2 を求めなさい。
- (5) $\dot{I}_2 = 0$ となる条件を導きなさい。また、そのとき回路の有効電力、言い換えれば平均電力を計算しなさい。

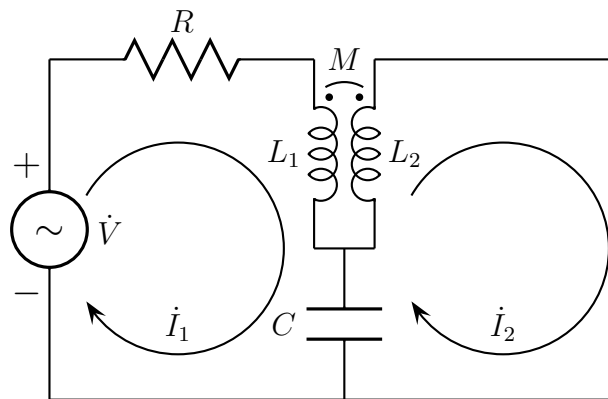
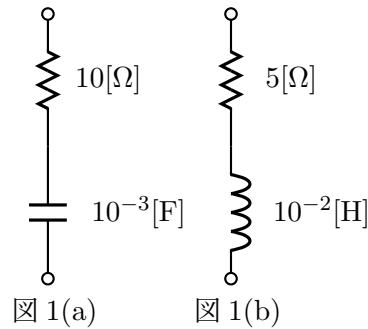


図 1

問題 2.

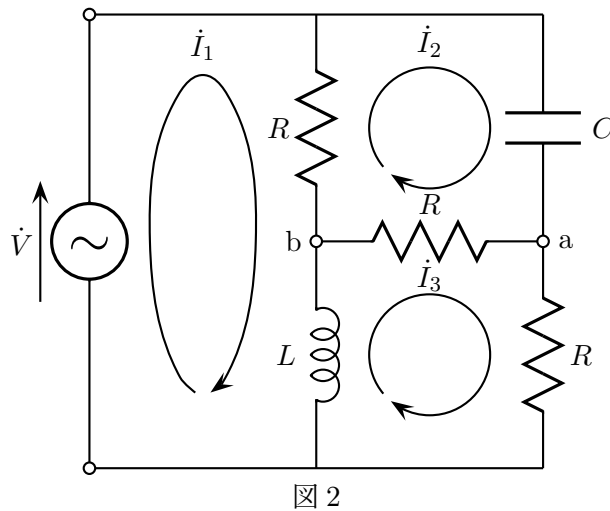
問 1. 図 1 の (a), (b) の交流回路の周波数応答に関する設問に答えなさい。

- (1) 角周波数を ω として、図 1 の (a), (b) の複素インピーダンス \dot{Z}_1, \dot{Z}_2 をそれぞれ求めなさい。
- (2) \dot{Z}_1, \dot{Z}_2 それぞれにおいて ω を $0 \sim \infty$ に変化させたときのベクトル軌跡の概形を解答欄の複素平面上に示しなさい。また、 \dot{Z}_1 と \dot{Z}_2 を直列に接続したときの複素インピーダンス \dot{Z} のベクトル軌跡を描きなさい。さらに、この直列回路において、共振現象を起こしたときのベクトル \dot{Z}_0 を図中に示し、共振現象について知るところを説明しなさい



問 2. 図 2 の交流回路において、角周波数を ω として、以下の設問に答えなさい。

- (1) $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ に関する網目方程式を導き、インピーダンス行列を用いて表しなさい。
- (2) \dot{I}_2 の値を求めなさい。ただし、クラメルの公式を使う場合は、インピーダンス行列の行列式を Δ とおいて良い。
- (3) a-b 間の電位差が 0 になる条件を求めなさい。



問 3. 図 3 の交流回路に関する設問に答えなさい。ただし、必要ならば、角周波数を ω としなさい

- (1) 図 3 の交流回路の a-a' 間の複素アドミタンス \dot{Y} のサセプタンス B の値を求めなさい。
- (2) 図 3 の各物理定数を $R_1 = 1[\Omega], R_2 = 2[\Omega], C = 10^{-2}[\text{F}], \Omega = 100[\text{rad/sec}]$ とし、a-a' 間に印加する複素交流電圧を \dot{V}_i 、このとき、 R_2 の両端 b-b' に現われる複素交流電圧を \dot{V}_o とする。伝達関数 (電圧伝送比) $W = \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i}$ を求めなさい
- (3) (2) において、 $W = \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i}$ のデシベルゲインを求めなさい。また、入力電圧 \dot{V}_i と出力電圧 \dot{V}_o の両者の位相は、どのような関係にあるか説明しなさい。

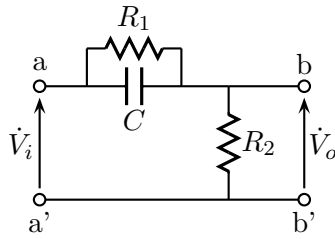


図 3

問題 3. 次の交流回路に関する設問に答えなさい。

1. 図 1 の交流回路において、 $a-b$ 間の複素アドミタンス \dot{Y}_1 と共振角周波数 ω_1 を求めなさい。

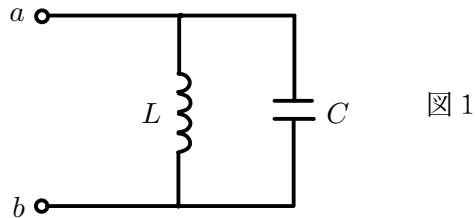


図 1

2. 図 2 において、 $a-b$ 間の複素アドミタンス \dot{Y}_2 と共振角周波数 ω_2 を求めなさい。また、問 1 で求めた共振角周波数 ω_1 との比 ω_2/ω_1 を求めなさい。

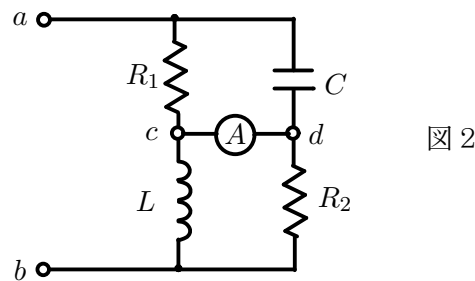


図 2

3. 図 3 に示すように、図 2 の $a-b$ 間に交流電源 \dot{E} をつなぎ、 $c-d$ 間に電流計を挿入した。ただし、交流電源の角周波数は ω である。電流計に流れる電流が $0[\text{A}]$ で、かつ回路に流れる電流 \dot{I} が ω に無関係な一定電流になる条件を求めなさい。

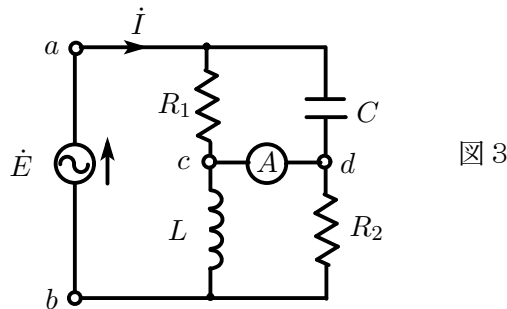
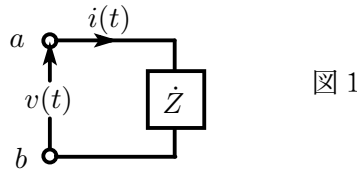


図 3

問題 4. 以下の交流回路に関する設問に答えなさい。

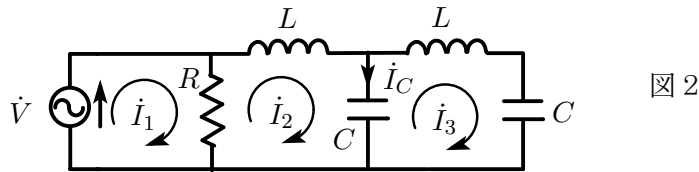
1. 図 1 の回路において、 $a-b$ 間に交流電圧 $v(t) = 100\sqrt{2}\sin(100t + \frac{\pi}{4})$ を印加したところ交流電流 $i(t) = 2\sqrt{2}\sin(100t + \frac{\pi}{2})$ が流れた。

- (a) $i(t)$, $v(t)$ を複素 (ベクトル表示) 電圧, 電流 \dot{V} , \dot{I} で表しなさい。
- (b) 複素インピーダンス $\dot{Z} = R + jX$ の R および X を求めなさい。
- (c) 回路の瞬時電力 $p(t)$ を求め, その角周波数を示しなさい。
- (d) 複素 (ベクトル表示) 電力 \dot{P} を求め, 有効電力 P_a , 無効電力 P_r , 力率 $\cos \phi$ を求めなさい。

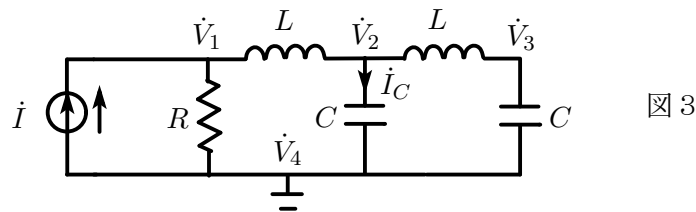


2. 以下のすべての設問において, 角周波数 $\omega = 100[\text{rad/sec}]$, $R = 5 [\Omega]$, $L = 3 \times 10^{-2}[\text{H}]$, $C = 5 \times 10^{-3}[\text{F}]$ とする。

- (a) 図2の回路に示したループ電流 \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , \dot{I}_3 に関する網目方程式を, インピーダンス行列を用いて表しなさい。



- (b) 図2の左側のコンデンサ C に流れる電流 \dot{I}_C を求めなさい。
- (c) 図2の交流電圧源 \dot{V} を図3のように交流電流源 \dot{I} に置きかえた。図中の \dot{V}_1 , \dot{V}_2 , \dot{V}_3 を節点電位として, アドミタンス行列を用いた節点方程式を導きなさい。ただし接地点の電位 \dot{V}_4 は0としなさい。また (b) と同様にコンデンサ C に流れる電流 \dot{I}_C を求めなさい。



問題5. 図1に示す回路に関する以下の問に答えなさい。ただし, 図中の電圧および電流は, フェーザ (複素電圧, 複素電流) 表示されている。また, 電圧源 \dot{E} の角周波数は ω とする。

- (1) 電圧 \dot{V}_1 を用いて電流 \dot{I}_2 を表しなさい。
- (2) \dot{V}_1 を用いて電圧 \dot{V}_2 を表しなさい。
- (3) 電流 \dot{I}_1 を求めなさい。ただし, \dot{V}_1 , \dot{V}_2 および \dot{I}_2 を用いずに解答すること。
- (4) \dot{E} と \dot{I}_1 が同相となるときのインダクタンス L を求めなさい。ただし, \dot{E} , \dot{V}_1 , \dot{V}_2 , \dot{I}_1 および \dot{I}_2 を用いずに解答すること。
- (5) 図1の回路のインダクタンス L を変圧器で置き換えた回路を図2に示す。ここで, M は変圧器の相互インダクタンスである。図2の電流 \dot{I} を求めなさい。

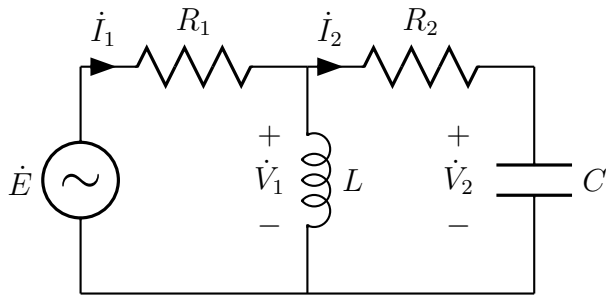


図 1

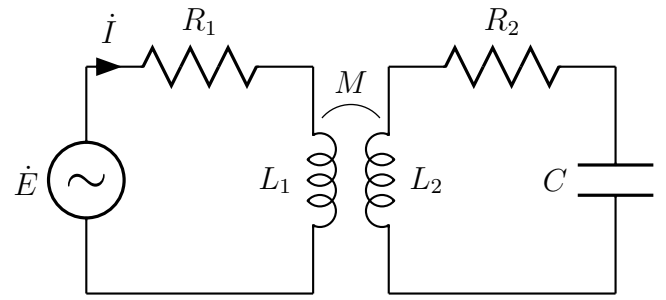


図 2

問題 6. R, L および電源からなる電気回路に関する問に答えなさい。なお、以下の問の抵抗 R およびインダクタ L の値は、全て $R = 5\Omega, L = 10\text{mH}$ として答えなさい。

- (1) 図 1 の回路において、電源電圧 $v(t)$ が図 2 のような矩形波のとき、電流 $i_R(t), i_L(t), i_T(t)$ の波形を図示しなさい。ただし、初期電流 ($t = 0$) は全て 0 である。

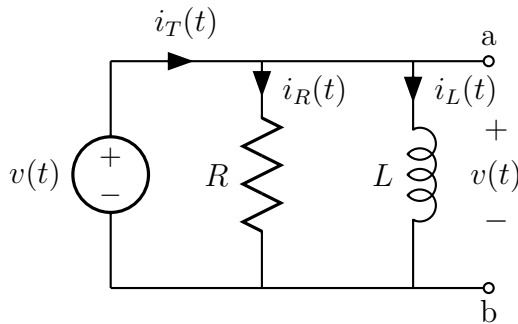


図 1

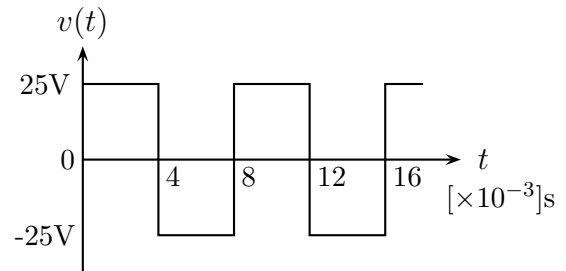


図 2

- (2) (1) において、回路で消費される平均電力 P_a を求めなさい。ただし、導出の過程を簡潔に説明しなさい。
- (3) 図 1 の電圧源 $v(t)$ として正弦波交流電圧 $v(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ を用いた。回路の複素アドミタンス \dot{Y} を示し、ついで電流 $i_T(t)$ の位相が電源電圧に比べて 30° 遅れるときの電圧源の角周波数 ω_0 を求めなさい。
- (4) (3) で求めた角周波数 ω_0 において、抵抗、インダクタ、キャパシタの何れかの要素を 1 つ選んで図 3 のように ab 端に接続し、回路全体の力率を 1 としたい。 \dot{Z} として適当な要素とその値を決定しなさい。

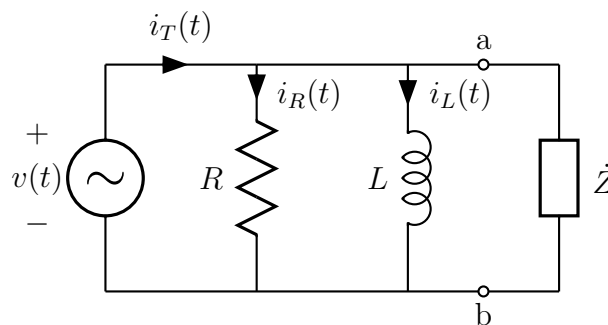


図 3

- (5) 図1において電圧源 $v(t)$ を正弦波電流源 $i(t) = 10 \sin(500t)$ としたとき、これを図4に示すような電圧源回路に等価変換したときの R' , L' および $v'(t)$ を求めなさい。

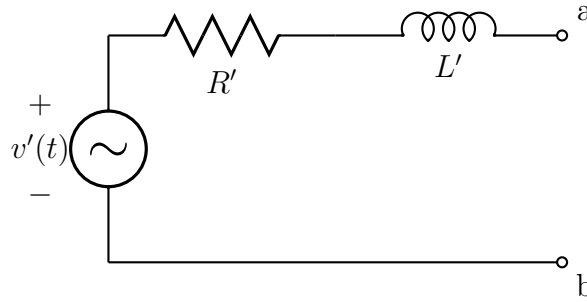


図4

問題7. 図1の交流回路に関する以下の設問に答えなさい。ただし、交流電圧源 \dot{E} の動作角周波数は ω である。また、ドットを付した文字は複素数を表すものとする。

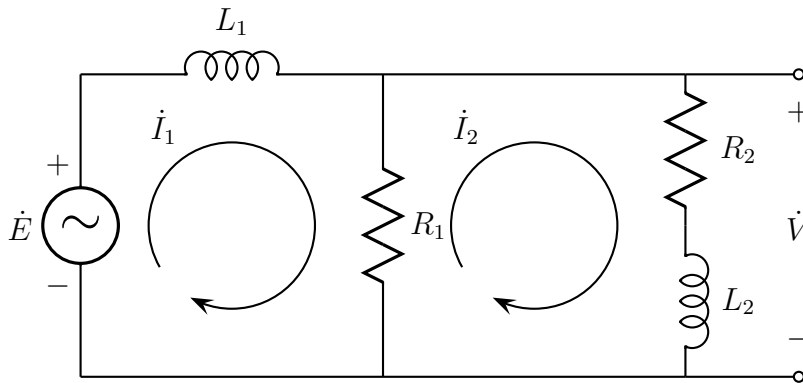


図1 交流回路

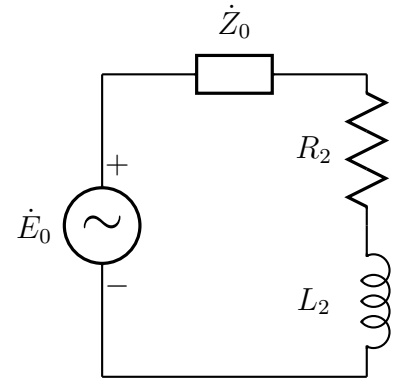


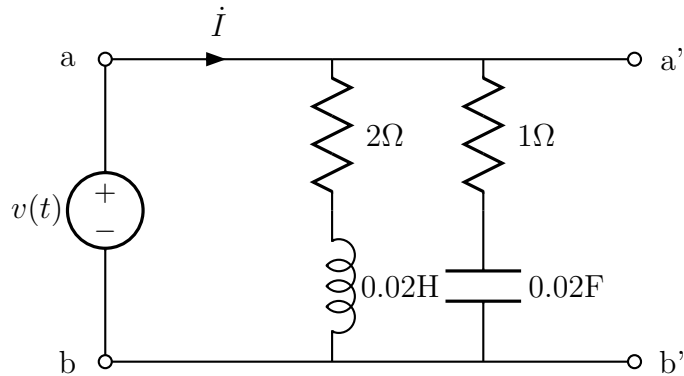
図2 等価電圧源

- (1) 図1中のループ電流 \dot{I}_1 , \dot{I}_2 が満たす網目方程式を導き、インピーダンス行列を用いて表しなさい。
- (2) ループ電流 \dot{I}_1 , \dot{I}_2 を求めなさい。
- (3) \dot{I}_2 の位相が電圧源 \dot{E} の位相より $\frac{\pi}{4}$ だけ遅れるときの条件を導きなさい。
- (4) 電圧伝達比 (伝達関数) $\dot{W} = \frac{\dot{V}}{\dot{E}}$ を求めなさい。
- (5) 図1の回路を図2のように等価電圧源と内部インピーダンスとして表したときの \dot{E}_0 , \dot{Z}_0 を求めなさい。

問題8. 図中の両端 a,b に $v(t) = 100\sqrt{2} \sin 50t$ [V] の交流電源を印加した。

- A) a-b間の複素インピーダンス \dot{Z} , 複素アドミタンス \dot{Y} を求めよ。
- B) 負荷電流 \dot{I} を求めよ。
- C) 有効電力, 無効電力, 力率を求めよ。

D) a'-b' 間に R, L, C の基本素子を挿入して回路の力率を 1 に改善したい。素子を選び, その値を決定せよ。



図

問題 9. 図 (a) の交流回路に等価な電圧源 (図 (b)), 電流源 (図 (c)) を求めよ。

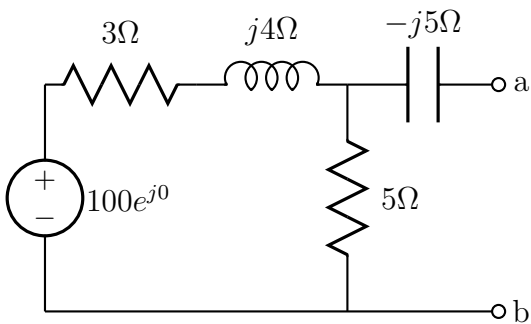


図 (a)

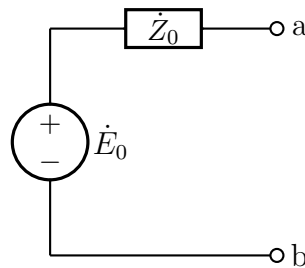


図 (b)

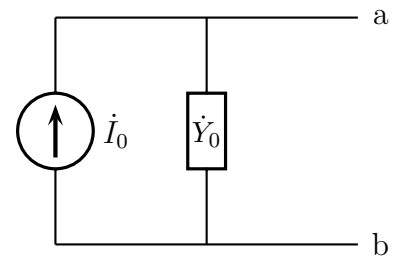
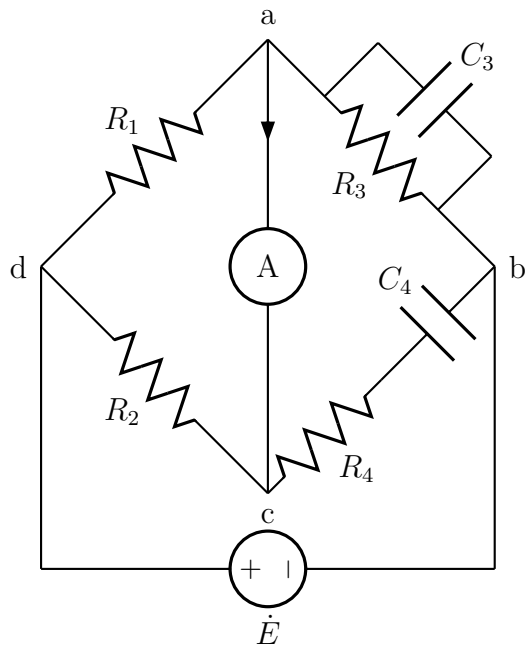


図 (c)

問題 10. 下図のブリッジ回路はウィーンブリッジと呼ばれている。以下の問に答えよ。ただし電源の角周波数は ω である。

- a-b 間の C_3, R_3 からなる並列回路のアドミタンス \dot{Y}_3 , b-c 間の C_4, R_4 からなる直列回路のインピーダンス \dot{Z}_4 を直交座標系で示せ。
- ブリッジが平衡条件 (検流計が 0 を示すとき) にあるとき, 平衡条件に上の結果を代入すると, $\frac{R_2}{R_1} = \boxed{a} + j\boxed{b}$ となる。a, b の値を求めよ。
- 平衡条件を満たすためには上の式より虚数部 b は 0 である。これより平衡である角周波数 ω_0 は $\omega_0 = \boxed{c}$ である。また両辺の実数部が等しい条件よりコンデンサ C_3, C_4 間に $\frac{C_3}{C_4} = \frac{\boxed{d}}{\boxed{e}}$ が成り立つ。上の $\boxed{\quad}$ の中の c, d, e を求めよ。



図

問題 11. 次の交流回路に関する設問に答えよ。

I.

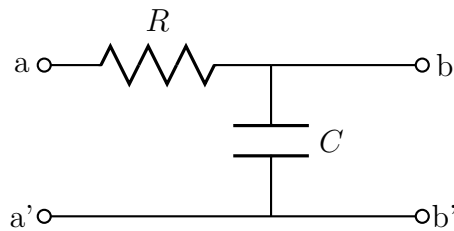


図 1

- (a) 図 1 の回路の a-a' 間の複素インピーダンス \dot{Z} 、複素アドミタンス \dot{Y} を求め、直交座標および極座標で示せ。ただし動作角周波数は ω とせよ。
- (b) 図 1 の a-a' 間に $v_1(t) = V_1\sqrt{2}\sin\omega t$ の電圧を印加したところ、b-b' 間の電圧は $v_2(t) = V_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \phi)$ である。伝達関数 $\dot{W}_1 = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}$ を求めよ。ただし、 \dot{V}_1 、 \dot{V}_2 はそれぞれ $v_1(t)$ 、 $v_2(t)$ の複素 (ベクトル) 表示電圧である。
- (c) $v_2(t)$ の位相 ϕ が -30° になる条件を ω 、 R 、 C を用いて表せ。
- (d) $C = 10^{-2}[\text{F}]$ 、 $R = 4[\Omega]$ とし、 $\omega = 0 \sim \infty$ と変化させたときの、 $\dot{Z}_1 = a + jb$ のベクトル軌跡を描きたい。回答欄の表を完成させ、ベクトル軌跡の概形を描け。

II

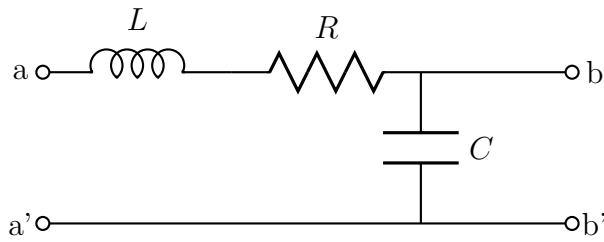


図 2

- (a) 図 2 の a-a' 間の複素アドミタンスを求め、直交座標表示せよ。ただし動作角周波数は ω とせよ。
- (b) 図 2 の a-a' 間に、 $v_1(t) = V_1\sqrt{2}\sin\omega t$ の電圧を印加したところ、b-b' 間の電圧は $v_2(t) = V_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \phi)$ となった。伝達関数 $\dot{W}_2 = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}$ を求めよ。
- (c) I で求めた \dot{W}_1 と、 \dot{W}_2 の性質の違いを定性的に説明せよ。
- (d) a-a' 間に、 $v_1(t) = V_1\sqrt{2}\sin\omega_0 t$ を印加したとき、回路の力率が 1 になった。 ω_0 の値を求めよ。

問題 12. 次の交流回路に関する設問に答えなさい。

- I. 図 1 の a-a' 間の複素インピーダンス \dot{Z} 、複素アドミタンス \dot{Y} を求め、それぞれ直交座標系および極座標系で示しなさい。ただし角周波数は ω としなさい。

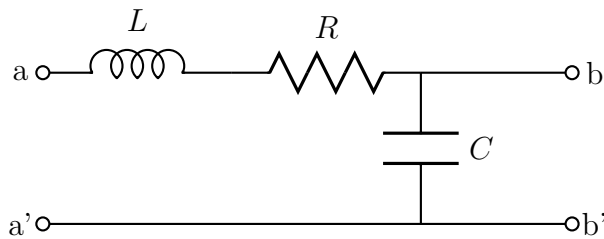


図 1

- II. 図 1 の a-a' 間に印加する正弦波電圧を \dot{V}_1 、b-b' 間の正弦波電圧を \dot{V}_2 とする。伝達関数 $\dot{W} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}$ を求め、直交座標系で示しなさい。ここで \dot{V} は複素（ベクトル表示）交流電圧を意味する。
- III. 図 1 の a-a' 間に、 $v_1(t) = \sqrt{2}V_1\sin\omega t$ の正弦波電圧を印加したとき、b-b' 間の正弦波電圧 $v_2(t)$ の位相 ϕ が、 -45° になる条件を ω 、 R 、 L 、 C を用いて表しなさい。
- IV. 図 1 の回路において、a-a' 間に、 $v_0(t) = \sqrt{2}V_0\sin\omega_0 t$ を印加したとき、回路の力率が 1 になった。 ω_0 の値を求めなさい。
- V. 角周波数が $\omega > \omega_0$ のとき、図 2 のように新たなコンデンサー C' を挿入し、回路の力率を 1 としたい。 C' の値を決定しなさい。また $\omega < \omega_0$ のとき、図 1 の回路に C'' を挿入して力率を 1 にするにはどのようにすればよいか。 C'' の挿入場所を指定し、その値を求めなさい。

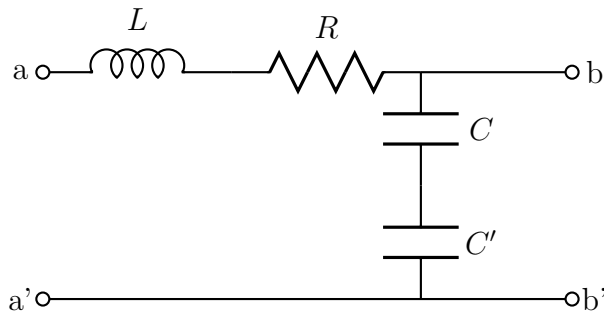


図 2

VI. 図 3 のように、a-a' 間に交流電圧源 \dot{E} 、b-b' 間に交流電流源 \dot{I} を挿入した。角周波数が ω_0 で求めたとき、C に流れる電流 \dot{I}_C を \dot{E} 、 \dot{I} および回路定数を用いて表しなさい。

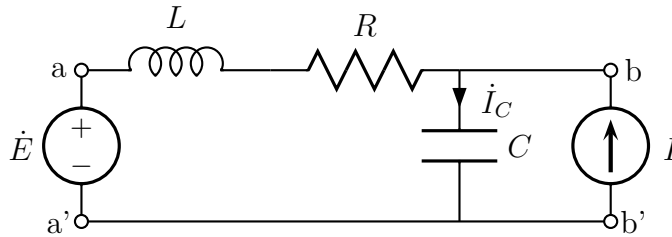


図 3

問題 13. 図 1 のようにコイル L 、コンデンサ C_1 、 C_2 、抵抗 R およびスイッチ SW_1 、 SW_2 、 SW_3 からなる回路が直流電圧源 E に接続されている。この回路について、以下の問に答えよ。なお、最初の状態では、各コンデンサの電圧、コイルの電流は、すべてゼロで、すべてのスイッチ SW_1 、 SW_2 、 SW_3 はいずれも開いているとする。

- (1) 最初に SW_1 を閉じた。 SW_1 を投入した瞬間を基準にして時刻 t を定義したとき、コンデンサ C_1 の電圧 v_{C_1} の時間変化を表す式を求め、その概形を図示しなさい。
- (2) 上記 (1) の時刻 $t = T_1$ におけるコンデンサ C_1 の蓄積エネルギーを求めなさい。
- (3) 上記 (1) の時刻 $t = T_1$ において、 SW_1 を開くとともに SW_2 を閉じた。この瞬間を時刻 t の新たな原点として、回路の素子定数と上記 (1) における時刻 $t = T_1$ の電圧 V_{C_1} を用いて、の電流 i_L の時間変化を表す式と、コンデンサ C_1 の電圧 v_{C_1} を表す式を求めなさい。必要に応じて表 II-1 を利用しなさい。
- (4) 上記 (3) で、コンデンサ C_1 の電圧 v_{C_1} が最初に 0 となる時刻 $t = T_2$ を回路の素子定数を用いて示しなさい。
- (5) 上記 (4) の時刻 $t = T_2$ におけるコイル L の電流 $i_L = I_{L2}$ を、回路の素子定数と上記 (3) における電圧 V_{C_1} を用いて示しなさい。
- (6) 上記 (3) における $t = T_1$ のときと、上記 (4) の時刻 $t = T_2$ のときについて、コイル L とコンデンサ C_1 に蓄えられるエネルギーがどのように変化したかを説明しなさい。
- (7) 上記 (4) における $t = T_2$ の瞬間に、 SW_2 を開くと同時に SW_3 を閉じた。この瞬間を時刻 t の新たな原点として、コンデンサ C_2 の電圧 v_{C_2} を表す式を、回路の素子定数と I_{L2} を用いて表しなさい。なお、電圧 v_{C_2} の符号にも注意して答えること。
- (8) 上記 (7) におけるコンデンサ C_2 の電圧 v_{C_2} の最大値を、その 1/2 にしたい場合、上記 (7) において SW_2 を開いて SW_3 を閉じるタイミングをどのようにすればよいかを答えなさい。

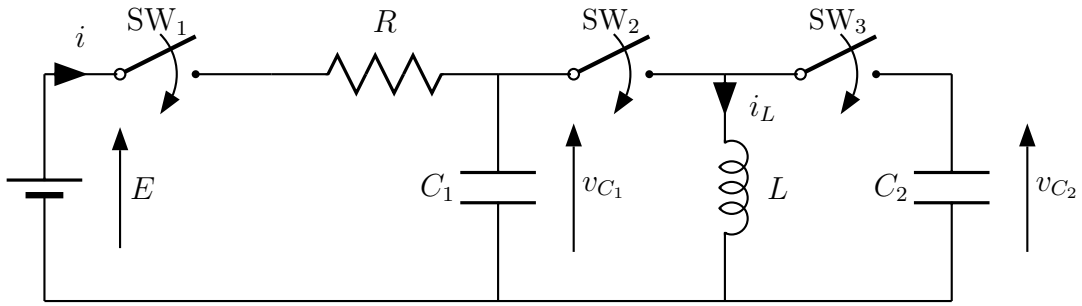
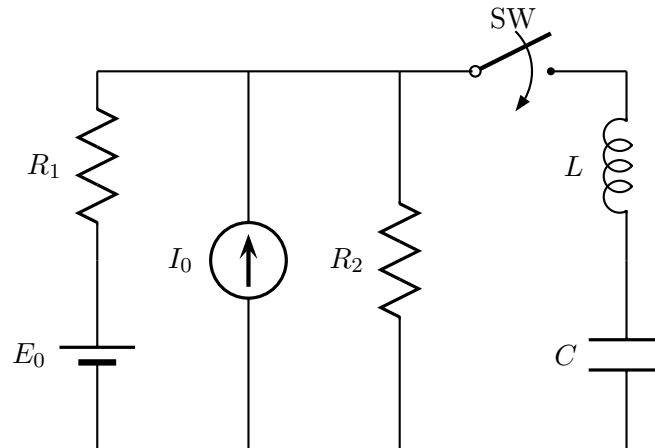


図 1

表 1. ラプラス変換表

$f(t)$	$F(s)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

問題 14. 下図に示すように、開放電圧が E_0 、内部抵抗が R_l の直流電圧源と、短絡電流が I_0 、内部抵抗が R_2 の直流電流源を並列に接続した電源に、負荷として、インダクタンスが L のコイルと、静電容量が C のコンデンサが、スイッチ SW を介して接続されている。以下の間に答えなさい。ただし、 $t \leq 0_-$ で、SW は開放されており、 C に電荷は蓄えられていない。



- (1) 時刻 $t = 0$ で SW を閉じたときに、 $t \geq 0_+$ で C の上部電極に蓄えられる電荷 $q(t)$ に関する微分方程式を導出する場合に、いくつかの異なった方法が考えられる。思いつく 2 つの方法を、それぞれ 150 字以内の平易な文章で述べなさい。
- (2) 問 (1) で述べた方法のうち適当な方法を選び、 $t \geq 0_+$ において成立する $q(t)$ に関する微分方程式を導出し、以下の形で表した場合の空欄を補いなさい。答えは、 R_l 、 R_2 、 C 、 E_0 、 I_0 を用いて表すこと。

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + (\text{イ}) \frac{dq(t)}{dt} + (\text{ロ}) q(t) = (\text{ハ}) \quad (1)$$

- (3) 式 (1) の微分方程式に対する特性方程式の根 p を

$$p = -\alpha \pm \gamma \quad (2)$$

とし、さらに、式 (1) の特殊解 (※) を適当な方法で見出し、式 (1) に対する $q(t)$ の一般解を求め、双曲線関数表示しなさい。ただし、式 (1) の (ハ) を E として、答えは、 α 、 γ 、 C 、 E を用いて表しなさい。なお、未定係数を A 、 B とすること

※ 特殊解を、電気回路理論では、定常解と呼ぶことが多い。

- (4) 問(3)で求めた $q(t)$ の一般解と、これより導かれる L に流れる電流の一般解を求め、さらに、これらの一般解に適切な初期条件を課して $q(t)$ の完全解を求め、以下の形で表した場合の空欄を補いなさい。答えは、 α, γ, C を用いて表すこと。

$$q(t) = (\text{ニ})E [1 - (\text{ホ}) \{ (\text{ヘ}) + (\text{ト}) \times (\text{チ}) \}] \quad (3)$$

- (5) 式(3)の $q(t)$ が非振動的であるとき、 $\sqrt{L/C}$ の最大値を求めなさい。

$$\sqrt{\frac{L}{C}} \Big|_{\max} = (\text{リ}) \quad (4)$$

- (6) 式(4)が成立する場合の $q(t)$ を式(3)から求め、以下の形で表した場合の空欄を補いなさい。答えは、 α を用いて表すこと。

$$q(t) = (\text{ニ})E \{1 - (\text{ホ})(\text{ヌ})\} \quad (5)$$

問題 15. 図1に示すように、直流電流源にコンダクタンス G とコイル L が接続された回路がある。ただし、 I_0 は電流源の電流である。

時刻 $t = 0$ でスイッチ SW を a から b へ切り替えたとき、 $t \geq 0_+$ において、 G とコイル L を流れる電流 $i_G(t)$ 、 $i_L(t)$ および G で消費されるエネルギーを以下の手順によって求めなさい。ただし、 $i_G(t)$ と $i_L(t)$ の方向は図に示すものとする。

- $i_G(t)$ と $i_L(t)$ の間に成立する関係式を求めなさい。
- G の両端の電圧と L の両端の電圧が満たしている関係式を $i_G(t)$ と $i_L(t)$ を用いて表わしなさい。
- 問1, 2で求めた方程式から、 $i_L(t)$ に関する微分方程式を求めなさい。
- $i_L(t)$ の初期値を求めてから、問3で求めた微分方程式より $i_L(t)$ を求めなさい。
- 問1, 2, 4の結果から、 $i_G(t)$ を求めなさい。
- G へ供給される瞬時電力 $p(t)$ を求めなさい。
- SW を切り替えてから十分に時間が経過するまでに、 G で熱として消費されるエネルギー W_G を求めなさい。
- 問7で求めた W_G は L の何と等しいか。

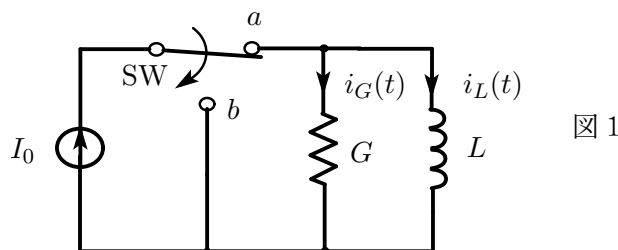


図1

問題 16. 図1に示す直流電流源を用いた回路 (I_0 は電流源の電流である) において、スイッチ SW は閉じている。時刻 $t = 0$ で SW を開いたとき、 $t \geq 0_+$ において、コンデンサ C とコイル L を流れる電流 $i_C(t)$ 、 $i_L(t)$ 、および C の上部電極に蓄えられる電荷 $q(t)$ を、以下の手順によって求めなさい。ただし、 $i_C(t)$ と $i_L(t)$ の方向は図に示すものとし、求める解は積分形を用いずに表わしなさい。

- (a) $i_C(t)$ 、 $i_L(t)$ およびの I_0 の間に成立する関係式を求めなさい。

- (b) L の両端の電圧と C の両端の電圧が満たすべき条件より $i_L(t)$ と $q(t)$ の間に成立する関係式を求めなさい。
- (c) $q(t)$ と $i_C(t)$ の関係式を求めなさい。
- (d) 問 (a)~(c) で求めた方程式の解をラプラス変換によって求めることとする。まず、ラプラス変換の定義に従って、指数関数 e^{jat} のラプラス変換を求め、これより、 $\sin(at)$ と $\cos(at)$ のラプラス変換を求めなさい。ここで、 $j = \sqrt{-1}$ である。
- (e) 問 (a)~(c) で求めた方程式をラプラス変換し、 $\Omega^2 = \frac{1}{LC}$ として、 s 領域での $I_C(s)$, $I_L(s)$, $Q(s)$ を求めなさい。
- (f) 問 (e) で求めた s 領域での $I_C(s)$, $I_L(s)$, $Q(s)$ を逆ラプラス変換し、 $i_C(t)$, $i_L(t)$, $q(t)$ を求めなさい。必要に応じて、部分分数展開と、問 (d) の結果を利用しなさい。

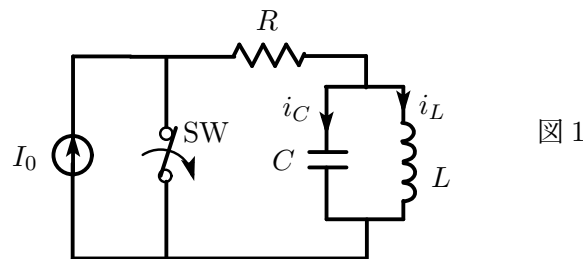
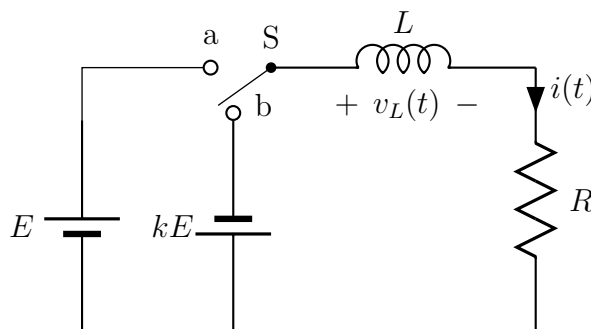


図 1

問題 17. 図のスイッチ回路について、以下の問に答えなさい。ただし、 $k > 0$ である。また、インダクタンスの初期電流を $i(0) = 0$ と仮定し、スイッチ S は、 $0 \leq t < T$ のとき a 側に閉じ、 $T \leq t < 2T$ のとき b 側に閉じ、 $t \geq 2T$ においても、この動作を繰り返す。

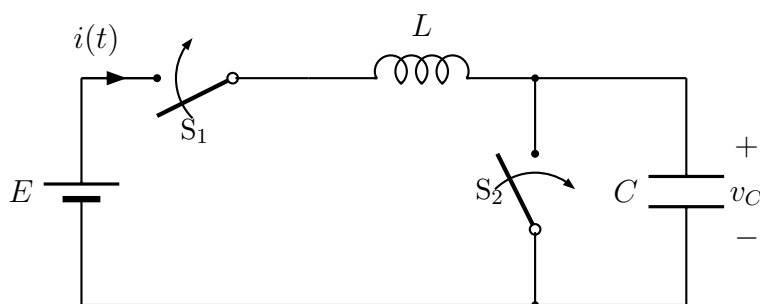
- (1) 時刻 $t = 0$ でスイッチ S が a 側に閉じた瞬間の、インダクタンス L の両端の電圧 $v_L(0)$ を求めなさい。
- (2) $0 \leq t < T$ において電流 $i(t)$ が満たすべき微分方程式を立て、その解を求めなさい。
- (3) $0 \leq t < T$ における電流 $i(t)$ の波形を描きなさい。
- (4) 次に時刻 $t = T$ でスイッチ S が b 側に閉じる。 $T \leq t < 2T$ において電流 $i(t)$ が満たすべき微分方程式を立て、その解を求めなさい。なお、必要に応じて、時間 t を $\tau = t - T$ に置き換えて考えてよい。
- (5) 時刻 $t = 2T$ で電流が $i(2T) = 0$ となるように定数 k を決めなさい。さらに、この場合の電流 $i(t)$ の波形を $0 \leq t \leq 2T$ について描きなさい。
- (6) $t \geq 2T$ において、スイッチ S が、 $0 \leq t \leq 2T$ における動作を繰り返したときの電流 $i(t)$ の平均値 I_A を求めなさい。



図

問題 18. 図の回路について、以下の問に答えなさい。なお、初期状態において、スイッチ S_1 および S_2 は、ともに開いており、キャパシタの電圧は 0 であるとする。また、電源の内部インピーダンス、キャパシタおよびインダクタの抵抗分は無視してよい。

- (1) 時刻 $t = 0$ でスイッチ S_1 を閉じた。このとき、電圧 v_C に関する微分方程式を求めなさい。
- (2) (1) において、電圧 v_C の波形を $0 \leq t < 2T$ について図示しなさい。ただし、 $T = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ である。また、波形は、電圧および時刻の目盛を明記して示すこと。
- (3) (2) において、電圧 v_C の最大値を求めなさい。
- (4) (2) において、インダクタの巻線抵抗が無視できない場合、電圧 v_C の波形はどのようなになるか、図示しなさい。
- (5) 時刻 $t = 0$ 以降にスイッチ S_2 を操作して、(3) における電圧 v_C の最大値を $5E$ にしたい。スイッチ S_2 をどのように操作すればよいかをできるだけ定量的に説明しなさい。ただし、インダクタの巻線抵抗は無視してよい。



図

問題 19. 図 1 に示す回路において、抵抗の両端の電圧 $v(t)$ を求めたい。電圧源 $e(t)$ の出力は図 2 に示すように 0 から E_0 まで連続に変化する。このとき、以下の設問に答えなさい。ただし、 $t < 0$ において、キャパシタに電荷はないものとする。

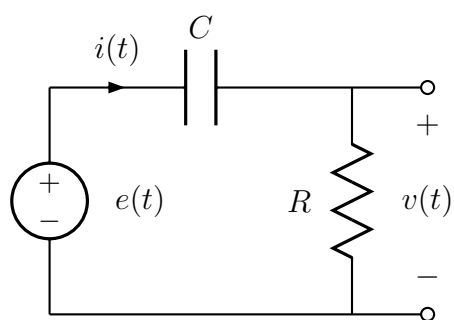


図 1

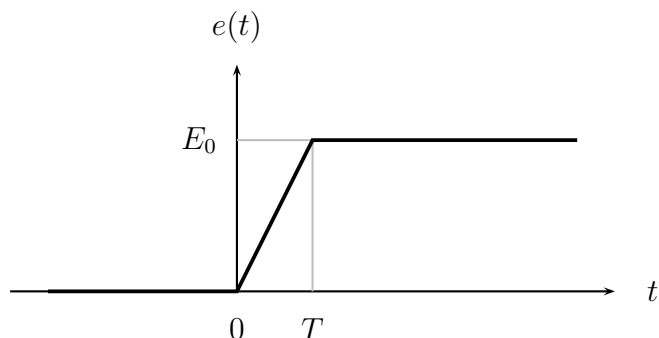


図 2

- (1) 回路を流れる電流 $i(t)$ が満足すべき微分方程式および初期値 $i(0)$ を書きなさい。なお、電源電圧は $e(t)$ のままでよい。

- (2) 電圧源 $e(t)$ に対する応答を調べる準備として、 $e(t)$ を $e_0(t) = E_0 \frac{t}{T} u(t)$ に置き換えたとき、 $i(t)$ を求めなさい。ただし、 $u(t)$ は単位ステップ関数で次式で与えられる。

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- (3) $e(t)$ を $E_0, T, u(t)$ を用いて表しなさい。
- (4) 電圧源が $e(t)$ のときの $i(t)$ を求めなさい。
- (5) $e(t)$ に対する $v(t)$ を求め、その概形を図示しなさい。